CHESTIUNI METODICE

Metoda normării

Marian TETIVA[1]

Introducere. În această notă vrem să dăm câteva exemple de utilizare a *metodei normării*, pe care am preluat-o, cu tot cu acest nume, din excelenta carte [**3**]; am pornit de la faptul că acolo nu există prea multe aplicaţii şi, la început mai mult în glumă, am demonstrat pe această cale câteva inegalităţi (nu tocmai uşoare). Cu timpul s-au adunat din ce în ce mai multe asemenea inegalităţi (şi din ce în ce mai grele). Metoda s-a dovedit extrem de eficientă pentru demonstrarea inegalităţilor omogene dar şi pentru obţinerea unor identităţi altfel greu de găsit, iată de ce vrem să o prezentăm aici; totuşi, trebuie s-o spunem, metoda normării nu este recomandată celor care au "alergie" la calcule: este pentru cei răbdători şi stăpâni pe tehnica matematică (ne referim la calculul elementar). De asemenea, se aplică inegalităţilor în care variabilele implicate sunt numere reale pozitive (sau nenegative).

Să începem cu o inegalitate foarte cunoscută (a se vedea şi [**3**], capitolul 6):

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc;$$

se ştie că aceasta e valabilă pentru orice numere reale a, b, c, dar noi o vom demonstra (complicat, veţi spune, dar e numai pentru a da un exemplu) doar pentru $a,b,c \geq 0$ (iată un dezavantaj; nu unul mare, pentru că majoritatea inegalităţilor care vor urma prezintă interes pentru cazul variabilelor nenegative şi, uneori, se pot extinde, plecând de la acesta, la orice valori reale ale variabilelor). Datorită simetriei, putem presupune fără a particulariza, că $c=\min\{a,b,c\}$. Pentru $c=0$ inegalitatea este evidentă:

$$a^2+b^2 \geq ab \Leftrightarrow (a-b)^2+a^2+b^2 \geq 0.$$

Fie $c>0$ şi să notăm $\dfrac{a}{c}=1+x$, $\dfrac{b}{c}=1+y$. Conform presupunerilor făcute, avem $x \geq 0$ şi $y \geq 0$, iar inegalitatea de demonstrat devine (după împărţirea cu c^2 şi cu noile notaţii)

$$(1+x)^2+(1+y)^2+1 \geq (1+x)(1+y)+1+x+1+y \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq xy,$$

evidentă (ca mai sus) chiar pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$, nu doar pentru $x,y \geq 0$. Se vede uşor că egalitatea are loc doar pentru $x=y=0$, deci numai dacă $a=b=c$. Şi mai mult, plecând de la

$$(1+x)^2+\left(1+y^2\right)+1-(1+x)(1+y)-1-x-1-y=x^2+y^2-xy$$

şi revenind la a, b, c (cu $x=\dfrac{a-c}{c}$, $y=\dfrac{b-c}{c}$) găsim identitatea

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=(a-c)^2+(b-c)^2-(a-c)(b-c),$$

care permite demonstrarea inegalităţii pentru orice $a,b,c \in \mathbb{R}$ şi chiar obţinerea unei rafinări:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq \frac{1}{2}\left((a-c)^2+(b-c)^2\right), \quad a,b,c \in \mathbb{R}\,!$$

---

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gheorghe Roşca Codreanu", Bârlad

Desigur, toate acestea se puteau face şi altfel şi sunt cunoscute, dar … nu e tocmai demonstraţia obişnuită a acestei inegalităţi, nu-i aşa?

Mai departe să considerăm inegalitatea

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^3b+b^3c+c^3a, \quad a,b,c \geq 0,$$

căreia îi aplicăm acelaşi tratament. Simetria (de data asta, doar circulară) ne permite să presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $c=\min\{a,b,c\}$; $c=0$ ne lasă inegalitatea în forma $a^4+b^4 \geq a^3b$, pentru orice $a,b \geq 0$ (*exerciţiul 1:* demonstraţi acest caz particular!). Mai departe fie $c>0$ şi să facem aceleaşi notaţii ca mai sus. Împărţim cu c^4 şi inegalitatea devine

$$(1+x)^4+(1+y)^4+1 \geq (1+x)^3(1+y)+(1+y)^3+1+x,$$

de demonstrat pentru $x,y \geq 0$. Calcule simple (*exerciţiul 2:* verificaţi-le!) o transformă în

$$3\left(x^2+y^2-xy\right)+3\left(x^3+y^3-x^2y\right)+x^4+y^4-x^3y \geq 0;$$

aceasta este adevărată, ba chiar se poate întări, ţinând cont de

$$x^2+y^2-xy \geq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right),$$

de

$$x^3+y^3-x^2y \geq xy^2 \quad (\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y) \geq 0)$$

şi de

$$x^4+y^4-x^3y \geq xy^3 \quad (\Leftrightarrow (x-y)^2\left(x^2+xy+y^2\right) \geq 0).$$

Astfel am obţinut de fapt

$$(1+x)^4+(1+y)^4+1-(1+x)^3(1+y)-(1+y)^3-1-x \geq$$
$$\geq \frac{3}{2}\left(x^2+y^2\right)+2xy^2+xy^3, \quad x,y \geq 0;$$

aici să revenim la variabilele iniţiale a, b, c şi să înmulţim cu c^4. *Exerciţiul 3:* arătaţi că ajungem la inegalitatea

$$a^4+b^4+c^4-\left(a^3b+b^3c+c^3a\right) \geq$$
$$\geq \frac{3}{2}c^2\left((a-c)^2+(b-c)^2\right)+3c(a-c)(b-c)^2+(a-c)(b-c)^3,$$

pentru orice numere nenegative a, b, c, c fiind cel mai mic dintre ele (este important acest lucru?). Iar *exerciţiul 4* vă cere să demonstraţi identitatea

$$a^4+b^4+c^4-\left(a^3b+b^3c+c^3a\right)=\frac{3}{2}\left((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right)+$$
$$+3c(a-b)^2(a+b-2c)+3c(a-c)(b-c)^2+$$
$$+(a-b)^2\left((a-c)^2+(b-c)^2+(a-c)(b-c)\right)+(a-c)(b-c)^3$$

(mai contează cum sunt numerele a, b, c?) şi să obţineţi şi alte întăriri ale inegalităţii considerate.

Acum, că aţi cam înţeles în ce constă metoda normării şi, în plus, aţi căpătat antrenament la calcule de acest tip, puteţi exersa chiar singuri şi ceva mai serios:

Exerciţiul 5. Arătaţi că, pentru orice numere reale nenegative a, b, c, d, cu $d=\min\{a,b,c,d\}$ are loc inegalitatea

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd-a^2b^2-a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2-b^2d^2-c^2d^2\geq$$
$$\geq d^2(a-d)^2+d^2(b-d)^2+d^2(c-d)^2+2d(a-d)(b-d)(c-d).$$

Deduceţi *inegalitatea lui Turkevici*

$$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd\geq a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$$

(pentru orice $a,b,c,d\geq 0$), identitate a cărei consecinţă este şi, eventual, alte rafinări ale ei.

Metoda normării şi o demonstraţie a inegalităţii mediilor. După cum s-a văzut, metoda descrisă în această notă se aplică în cazul inegalităţilor simetrice şi omogene în $n+1$ variabile, să le spunem $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$. Simetria ne permite să considerăm, nerestrictiv, că, de exemplu, a_{n+1} este cel mai mic dintre toate numerele $a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}$ (chiar şi simetria circulară ne permite o asemenea presupunere). După ce verificăm inegalitatea pentru $a_{n+1}=0$ (dacă e cazul) folosim substituţiile

$$\frac{a_1}{a_{n+1}}=1+x_i,\ \frac{a_2}{a_{n+1}}=1+x_2,\ \ldots\ ,\ \frac{a_n}{a_{n+1}}=1+x_n,$$

unde, desigur, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ sunt nenegative (ceea ce, de obicei, ajută în noua formă a inegalităţii). Se poate alege şi $a_{n+1}=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_{n+1}\}$, dar e doar o chestiune de gust, nu schimbă esenţial calculele. Apoi, folosind transformările inverse

$$x_1=\frac{a_1-a_{n+1}}{a_{n+1}},\ x_2=\frac{a_2-a_{n+1}}{a_{n+1}},\ \ldots\ ,\ x_n=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}},$$

ne putem întoarce la inegalitatea noastră pentru a obţine chiar întăriri ale ei (căci, de obicei, rămân în diferenţa dintre cei doi membri ai inegalităţii transformate mulţi termeni nenegativi care pot fi utilizaţi în acest scop), sau identităţi interesante (care o implică). Cine a citit cu atenţie descrierea metodei în [**3**] a observat deja că noi am considerat o formă particulară a acesteia. Asta pentru că aşa am lucrat noi şi am obţinut destule rezultate interesante (chiar mai multe decât cele expuse aici). Dar, citiţi [**3**] şi veţi afla şi mai multe (chiar dacă în capitolul dedicat normării sunt puţine exemple)!

În această secţiune am ales pentru exemplificare demonstraţia inegalităţii

$$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geq na_1a_2\cdots a_n,\quad a_1,a_2,\ldots,a_n\geq 0,$$

adică a *inegalităţii mediilor*, o demonstraţie care s-ar putea să pară complicată (şi chiar este!) faţă de multe alte demonstraţii cunoscute (căci, nu-i aşa? se cunosc foarte multe demonstraţii ale inegalităţii mediilor); totuşi să o facem.

Cum verificarea în cazurile $n\in\{1,2\}$ (sau chiar $n=3$) nu mai constituie o problemă trecem direct la pasul de inducţie; pe care o facem după schema: presupunem că am demonstrat că, pentru fiecare $k\leq n$ inegalitatea

$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_k^k\geq ka_1a_2\cdots a_k$$

are loc (pentru *orice* $a_1,a_2,\ldots,a_k\geq 0$) şi o dovedim pentru $k=n+1$. În inegalitatea de demonstrat

$$a_1^{n+1}+a_2^{n+1}+\cdots+a_n^{n+1}+a_{n+1}^{n+1}\geq(n+1)\,a_1a_2\cdots a_na_{n+1},\quad a_1,a_2,\ldots a_n,a_{n+1}\geq 0,$$

putem presupune, cum am spus, $a_{n+1} = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$. Cum $a_{n+1} = 0$ duce la o inegalitate absolut banală, putem considera $a_{n+1} > 0$, să împărţim cu a_{n+1}^{n+1} şi să facem substituţiile de mai sus; vom avea de demonstrat că

$$(1+x_1)^{n+1} + (1+x_2)^{n+1} + \cdots + (1+x_n)^{n+1} + 1 \geq (n+1)(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n),$$

pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.

Exerciţiul 6. Arătaţi că, după câteva calcule, ne rămâne inegalitatea

$$\sum_{k=2}^{n}\left(C_{n+1}^{k}\sum_{j=1}^{n}x_j^k - (n+1)\sum x_1x_2\cdots x_k\right) + \sum_{j=1}^{n}x_j^{n+1} \geq 0.$$

Prin $\sum x_1x_2\cdots x_k$ înţelegem suma tuturor celor C_n^k produse de câte k factori (cu indici distincţi) aleşi dintre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (pentru $k = n$ suma conţine doar un termen, produsul $x_1x_2\cdots x_n$).

Pentru a demonstra această inegalitate, să observăm întâi că, dacă folosim ipoteza de inducţie, avem (pentru $2 \leq k \leq n$)

$$x_1^k + x_2^k + \cdots + x_k^k \geq kx_1x_2\cdots x_k$$

şi chiar putem scrie C_n^k inegalităţi de acest tip (câte una pentru fiecare grup de k dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$); adunăm toate aceste inegalităţi şi avem

$$\sum\left(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_k^k\right) \geq k\sum x_1x_2\cdots x_k.$$

Cum în membrul stâng fiecare x_j, $1 \leq j \leq n$, apare de C_{n-1}^{k-1} ori, de fapt am obţinut

$$C_{n-1}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}x_j^k \geq k\sum x_1x_2\cdots x_k \Leftrightarrow \frac{n+1}{n}\,C_{n-1}^{k-1}\sum_{j=1}^{n}x_j^k \geq (n+1)\sum x_1x_2\cdots x_k,$$

pentru fiecare $k \in \{2, \ldots, n\}$. Prin urmare, membrul stâng al inegalităţii de demonstrat se minorează astfel

$$\sum_{k=2}^{n}\left(C_{n+1}^{k}\sum_{j=1}^{n}x_j^k - (n+1)\sum x_1x_2\cdots x_k\right) + \sum_{j=1}^{n}x_j^{n+1} \geq$$

$$\geq \sum_{k=2}^{n}\left(\left(C_{n+1}^{k} - \frac{n+1}{k}\,C_{n-1}^{k-1}\right)\sum_{j=1}^{n}x_j^k\right) + \sum_{j=1}^{n}x_j^{n+1}.$$

Evident, mai avem să demonstrăm că expresia din membrul drept este ≥ 0. Un calcul simplu ne arată că

$$C_{n+1}^{k} - \frac{n+1}{n}\,C_{n-1}^{k-1} = \frac{n+1}{n}\left(C_n^{k-1} - C_{n-1}^{k-1}\right) = \frac{n+1}{k}\,C_{n-1}^{k-2} = \frac{k-1}{n}\,C_{n+1}^{k},$$

deci, de fapt, ne-a mai rămas

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\,C_{n+1}^{k}\sum_{j=1}^{n}x_j^k\right) + \sum_{j=1}^{n}x_j^{n+1} \geq 0,$$

care este evidentă, datorită faptului că $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt nenegative; demonstraţia prin inducţie este încheiată.

Exercițiul 7. Demonstrați identitatea

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n - na_1a_2\cdots a_n =$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1} a_n^{n-k}\left(C_n^k \sum_{j=1}^{n-1}(a_j - a_n)^k - n\sum (a_1 - a_n)(a_2 - a_n)\cdots(a_k - a_n)\right) + \sum_{j=1}^{n-1}(a_j - a_n)^n$$

pentru orice numere (chiar numere complexe) $a_1, a_2, \ldots, a_n$. (Cea de-a doua sumă din paranteza mare cuprinde toate cele C_{n-1}^k produse de k factori aleşi dintre $a_1 - a_n$, $a_2 - a_n, \ldots, a_{n-1} - a_n$.) De exemplu,

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd = 2d^2\big(3(a-d)^2 + 3(b-d)^2 + 3(c-d)^2 -$$
$$- 2(a-d)(b-d) - 2(a-d)(c-d) - 2(b-d)(c-d)\big) + 4d\big((a-d)^3 +$$
$$+ (b-d)^3 + (c-d)^3 - (a-d)(b-d)(c-d)\big) + (a-d)^4 + (b-d)^4 + (c-d)^4,$$

pentru orice numere (complexe) a, b, c, d. Şi atunci nu vă va fi greu cu

Exercițiul 8. Arătați că pentru orice numere reale nenegative a, b, c, d, d fiind cel mai mic dintre ele, are loc inegalitatea

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 2d^2\big((a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 +$$
$$+ (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2\big).$$

(Puteți rezolva asta prin metoda normării?)

În încheiere vă mai propunem câteva exerciții (grele!). Primul dintre ele este totuşi mai simplu şi vine în completarea celei de-a doua inegalități din introducere.

Exercițiul 9. Demonstrați cea de a doua inegalitate din

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a \geq abc(a+b+c), \quad a, b, c \geq 0.$$

Nu uitați să căutați îmbunătățiri ale acestei inegalități, precum şi identitatea a cărei consecință este!

Exercițiul 10. Demonstrați, folosind metoda normării, inegalitatea lui *Surányi* [**2**]

$$(n-1)(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n) + na_1a_2\cdots a_n \geq$$
$$\geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \cdots + a_n^{n-1}\right)$$

şi obțineți întăriri ale ei.

Şi, în sfârşit, pentru ultimul exercițiu aveți nevoie şi de ceva inspirație pentru a demonstra inegalitatea la care se ajunge după normare (nu întotdeauna ea va rezulta fără probleme!).

Exercițiul 11. Demonstrați că inegalitatea

$$a^2(a-b)(a-2b) + b^2(b-c)(b-2c) + c^2(c-a)(c-2a) \geq 0$$

are loc pentru orice numere reale a, b, c. Această inegalitate a fost publicată de **Vasile Cârtoaje** în *Gazeta Matematică*, în urmă cu mai mulți ani [**1**].

Bibliografie

1. **V. Cârtoaje** - *Problema 22694*, Gazeta Matematică, seria B, 7-8/1992.
2. **G. Dospinescu** - *O teoremă uitată - inegalitatea lui Surányi*, RecMat - 1/2005.
3. **M. Onucu Drimbe** - *Inegalități - idei şi metode*, Editura Gil, Zalău, 2003.