Asupra unei recurenţe de ordin doi

Gheorghe IUREA [1]

În [**1**], la pag. 59, apare următoarea problemă (autor **Vasile Berinde**):

Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definit prin relaţiile:* $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = 2x_n^2 + 2x_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Aflaţi numerele $M \in \mathbb{R}$ *cu proprietatea că, dacă* $x_0 \le M$*, atunci* $x_n \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Arătaţi că pentru $x_0 \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ *şirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge şi calculaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c) Determinaţi expresia lui x_n *în funcţie de* x_0 *şi* n.

Întrucât în rezolvarea acestei probleme dată în [**1**] sunt unele scăpări, ne propunem să ne ocupăm mai amănunţit cu acest şir interesant.

În privinţa punctului *a*), fie $M \in \mathbb{R}$ cu proprietatea cerută; fie $x_0 = M - t \le M$, $t \ge 0$ şi trebuie să avem $x_1 \le M$. Dar $x_1 = 2t^2 - 2t(1 + 2M) + 2M^2 + 2M - 1$ şi cum $\lim\limits_{t\to\infty} x_1 = \infty$, deducem că pentru t suficient de mare avem $x_1 > M$. Prin urmare, nu există M cu proprietatea cerută.

Să observăm că recurenţa dată este echivalentă cu $x_{n+1} + \dfrac{1}{2} = 2\left(x_n + \dfrac{1}{2}\right)^2 - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Notând $y_n = x_n + \dfrac{1}{2}$, obţinem $y_{n+1} = 2y_n^2 - 1$, $y_0 = x_0 + \dfrac{1}{2}$. Evident, studiul şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se reduce la studiul şirului $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Faptul că cerinţa de la punctul *b*) este greşită rezultă din următoarea

Propoziţie. *Fie* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale, definit prin*

$$y_0 \in \mathbb{R}, \quad y_{n+1} = 2y_n^2 - 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

a) Pentru $y_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este divergent şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

b) Pentru $y_0 \in [-1, 1]$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent dacă şi numai dacă există* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât şirul* $(y_n)_{n\ge n_0}$ *este constant.*

c) $y_n = \cos(2^n t_0)$, $t_0 = \arccos y_0$ *pentru* $y_0 \in [-1, 1]$ *şi* $y_n = \dfrac{e^{2^n t_0} + e^{-2^n t_0}}{2}$, $t_0 = \ln\left(|y_0| + \sqrt{y_0^2 - 1}\right)$, *pentru* $y_0 \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

d) Dacă $M = \left\{y_0 \in \mathbb{R};\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ este convergent}\right\}$ *atunci:*

1. *M este nevidă, finită.*
2. $M = A \cup B$, unde

$$A = \left\{\cos\frac{2k\pi}{2^{n_0}}; k = 0, 1, \ldots, 2^{n_0} - 1\right\}, \quad B = \left\{\cos\frac{\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{2^{n_0'}}; k = 0, 1, \ldots, 2^{n_0'} - 1\right\},$$

cu n_0, n_0' *numere naturale fixate.*

e) Şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent dacă şi numai dacă* $y_0 \in A' \cup B'$, *unde*

$$A' = \left\{\pm\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \pm \cdots \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}}}_{n_0 \text{ radicali}}\right\}, \quad B' = \left\{\pm\underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \pm \cdots \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}}}}_{n_0' \text{ radicali}}\right\},$$

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Dimitrie Cantemir", Iaşi

semnele $\pm$ fiind alese în toate modurile posibile.

Demonstraţie. *a*) Dacă $y_0 \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$, atunci $y_0^2 > 1$ şi inductiv rezultă că $y_n > 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Cum $y_{n+1} - y_n = 2y_n^2 - 1 - y_n = (2y_n+1)(y_n-1) > 0$, rezultă că (y_n) este strict crescător. Prin urmare, există $l = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; dacă $l \in \mathbb{R}$, rezultă $l = 2l^2 - 1$, deci $l \in \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$, imposibil, întrucât $y_n > 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ şi (y_n) este strict crescător. Conchidem că $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

b) Fie (y_n) convergent. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = l$, rezultă $l = 2l^2 - 1$, deci $l \in \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$.

Dacă $l = 1$, din relaţia de recurenţă rezultă $y_{n+1} - 1 = 2(y_n - 1)(y_n + 1)$, deci $|y_{n+1} - 1| = 2|y_n - 1||y_n + 1|$. Presupunând că $y_n \neq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|y_{n+1}-1|}{|y_n-1|} = \lim\limits_{n\to\infty} 2|y_n+1| = 4$ şi din criteriul raportului rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - 1| = \infty$, absurd. Aşadar, există $n_0 \in \mathbb{N}$ cu $y_{n_0} = 1$ şi atunci $y_n = 1$, $n \geq n_0$.

În cazul $l = -\dfrac{1}{2}$ scriem relaţia de recurenţă sub forma $2y_{n+1}+1 = (2y_n+1)(2y_n-1)$ şi continuăm ca mai sus.

Presupunem acum că există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $(y_n)_{n\geq n_0}$ este constant. Din relaţia de recurenţă deducem $y_{n_0} \in \left\{1, -\dfrac{1}{2}\right\}$. Cum $y_{n_0} = 1$ implică $y_n = 1$, $n \geq n_0$, rezultă că $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent cu limita egală cu 1. La fel, dacă $y_{n_0} = -\dfrac{1}{2}$ deducem $y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\dfrac{1}{2}$.

c) Se demonstrează prin inducţie matematică.

d) 1. Cum $1 \in M$, rezultă că $M \neq \emptyset$. Folosind *a*) şi *b*), $y_0 \in M$ implică existenţa unui n_0 astfel încât $(y_n)_{n\geq n_0}$ este constant (egal cu 1 sau $-\dfrac{1}{2}$). Dacă $y_n = 1$, $n \geq n_0$, din sistemul $y_{n_0} = 2y_{n_0-1}^2 - 1$, $y_{n_0-1} = 2y_{n_0-2}^2 - 1, \ldots, y_1 = 2y_0^2 - 1$, din aproape în aproape, găsim un număr finit de valori pentru y_0. La fel se analizează cazul $y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0$.

2. $y_0 \in M$ implică faptul că $y_n = 1$, $n \geq n_0$ sau $y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0'$ (n_0, n_0' numere naturale arbitrare, dar fixate).

Folosind *c*) şi $y_0 \in M \subset [-1,1]$, deducem $\cos(2^n \arccos y_0) = 1$, de unde $y_0 \in \left\{\cos\dfrac{2k\pi}{2^{n_0}}; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Folosind periodicitatea funcţiei cosinus rezultă că $y_0 \in A$. La fel, din $y_n = -\dfrac{1}{2}$, $n \geq n_0'$, deducem că $y_0 \in B$. În concluzie, $M = A \cup B$.

e) Folosind formula $\cos\dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos x}$, $x \in \mathbb{R}$, deducem că $A \subset A'$ şi cum mulţimile au fiecare câte 2^{n_0} elemente, rezultă că $A = A'$. La fel, $B = B'$.

Bibliografie

1. **Gh. Eckstein et al.** - *Olimpiadele şi concursurile de matematică IX – XII*, Editura Bîrchi, 2005.