Două funcţii cu aceeaşi derivată pe un interval nu diferă neapărat printr-o constantă

***Paul GEORGESCU*[1], *Gabriel POPA*[2]**

Printre "cunoştinţele" dobândite de unii elevi în urma studierii Analizei Matematice de liceu se numără, din păcate, şi următoarea "teoremă", menţionată în manualul [**1**], pag. 282:

Dacă $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ au aceeaşi derivată pe (a, b), atunci ele diferă printr-o constantă.

"Demonstraţia" urmează linia de mai jos:

Dacă $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, atunci $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, deci $f - g$ este constantă pe (a, b).

Desigur, nu avem neapărat că $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, egalitate ce nici măcar nu are sens pentru $f'(x) = g'(x) = \pm\infty$ şi deci demonstraţia de mai sus este invalidă.

Observăm că "f are derivată pe (a, b)" nu este acelaşi lucru cu "f este derivabilă pe (a, b)"; un exemplu este dat de $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x - \frac{a+b}{2}}$, care are derivată pe (a, b) fără a fi derivabilă pe (a, b), deoarece $f'_s\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'_d\left(\frac{a+b}{2}\right) = +\infty$.

Dacă, în plus, f şi g sunt presupuse a fi derivabile pe (a, b), atunci raţionamentul de mai sus este corect, conducând la următorul binecunoscut rezultat:

Dacă $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile au aceeaşi derivată pe (a, b), atunci ele diferă printr-o constantă.

Prezentăm în continuare un exemplu, datorat matematicianului polonez **Stanislaw Ruziewicz**, de un număr infinit de funcţii cu aceeaşi derivată pe un interval, diferenţa oricăror două nefiind constantă, [**3**]. Vezi, de asemenea, [**2**] pag. 60.

Fie $s \geq 1$. Împărţim segmentul $[0, s]$ în trei părţi în aşa fel încât segmentul mijlociu are lungimea $\frac{1}{3}$, iar centrul său este centrul segmentului $[0, s]$. Acoperim apoi segmentul mijlociu cu semicercul superior de diametru $\frac{1}{3}$ determinat de acesta şi apoi ştergem acest segment (exclusiv capetele). Împărţim apoi fiecare dintre cele două segmente rămase în câte trei segmente în aşa fel încât segmentele mijlocii să aibă lungimea $\frac{1}{3^2}$, iar centrele segmentelor care sunt împărţite să coincidă cu centrele segmentelor mijlocii. De asemenea, acoperim segmentele mijlocii cu semicercurile de diametru $\frac{1}{3^2}$ determinate de acestea şi apoi ştergem aceste segmente, exclusiv capetele. Repetând această procedură, la pasul n vom avea de construit 2^{n-1} semicercuri de diametru $\frac{1}{3^n}$ şi de şters diametrele corespunzătoare, exclusiv capetele, ş. a. m. d. Obţinem deci o infinitate numărabilă de semicercuri şi fie M_s reuniunea segmentelor rămase neacoperite şi a semicercurilor.

[1] Lector dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

[2] Profesor, Colegiul Naţional, Iaşi

Este evident că M_s poate fi privit ca graficul unei funcţii continue $f_s : [0,s] \to \left[0, \frac{1}{6}\right]$; demonstraţia acestui fapt foloseşte convergenţa uniformă a unui anumit şir de funcţii continue.

Fie atunci $F_s : [0,s] \to \left[0, \frac{\pi}{56}\right]$, $F_s(t) = \int_0^t f_s(x)\,ds$, pentru $0 \le t \le s$. Atunci F_s este derivabilă cu derivata continuă, iar deoarece $f_s(x) \ge 0$, $\forall x \in [0,s]$, F_s este şi crescătoare. Mai mult, din modul de construcţie a lui M_s se observă că pentru orice $0 \le t_1 < t_2 \le s$ intervalul $[t_1, t_2]$ are un subinterval comun cu un interval acoperit de un semicerc, deoarece după pasul n orice subinterval al lui $[0,s]$ de lungime $\ge \frac{s}{2^n}$ are un subinterval comun cu un interval acoperit de un semicerc.

Cum pe aceste subintervale f ia valori strict pozitive şi este continuă, obţinem că $F_s(t_1) < F_s(t_2)$, deci F_s este strict crescătoare. Mai mult,
$F_s(s) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{2^2}{3^4} + \ldots\right) = \frac{\pi}{56}$, iar $F_s(0) = 0$.

Cum F_s este strict crescătoare şi surjectivă, ea este inversabilă şi fie $\Phi_s : \left[0, \frac{\pi}{56}\right] \to [0,s]$ inversa sa. Observăm că, deoarece F_s este continuă şi strict crescătoare, Φ_s este de asemenea continuă şi strict crescătoare. Determinăm acum $\Phi_s'(u)$ pentru $u \in \left[0, \frac{\pi}{56}\right]$.

Dacă $u = F_s(t_s)$, $0 \le t_s \le s$, cu $f_s(t_s) \ne 0$, atunci $\Phi_s'(u) = \frac{1}{F_s'(t_s)} = \frac{1}{f_s(t_s)}$.

Dacă $u = F_s(t_s)$, $0 \le t_s \le s$, cu $f_s(t_s) = 0$, atunci $F_s'(t_s) = 0$ şi nu putem aplica formula de derivare a funcţiei inverse. Totuşi, utilizând definiţia derivatei şi faptul că F_s este strict crescătoare, obţinem că $\Phi_s'(u) = +\infty$.

Fie acum $1 \le s_1 < s_2 < \infty$. Utilizând semnificaţia geometrică a integralei Riemann, remarcăm că are loc următoarea proprietate:

Dacă $0 \le t_1 \le s_1$ *şi* $0 \le t_2 \le s_2$, *iar* $F_{s_1}(t_1) = F_{s_2}(t_2)$, *atunci* $f_{s_1}(t_1) = f_{s_2}(t_2)$

(este important de notat că razele semicercurilor construite pentru cele 2 valori ale lui s nu depind de s, iar dacă $F_{s_1}(t_1) = F_{s_2}(t_2)$, atunci $M_1(t_1, f_{s_1}(t_1))$ şi $M_2(t_2, f_{s_2}(t_2))$ trebuie să se afle la aceeaşi înălţime, pe semicercuri corespunzătoare).

Fie $u \in \left[0, \frac{\pi}{56}\right]$. Dacă $u = f_{s_1}(t_{s_1})$, $0 \le t_{s_1} \le s_1$, cu $f_{s_1}(t_{s_1}) \ne 0$, fie $0 \le t_{s_2} \le s_2$ astfel ca $u = f_{s_2}(t_{s_2})$. Atunci $F_{s_1}(t_{s_1}) = F_{s_2}(t_{s_2})$, deci $f_{s_1}(t_{s_1}) = f_{s_2}(t_2)$, conform proprietăţii de mai sus, şi deci $\Phi_{s_1}'(u) = \Phi_{s_2}'(u) = \frac{1}{f_{s_1}(t_{s_1})}$. Dacă $u = F_{s_1}(t_{s_1})$, $0 \le t_{s_1} \le s_1$, cu $f_{s_1}(t_{s_1}) = 0$, fie $0 \le t_{s_2} \le s_2$ astfel ca $u = F_{s_2}(t_{s_2})$. Atunci $F_{s_1}(t_{s_1}) = F_{s_2}(t_{s_2})$, deci $f_{s_1}(t_{s_1}) = f_{s_2}(t_{s_2}) = 0$, conform proprietăţii de mai sus, şi deci $\Phi_{s_1}'(u) = \Phi_{s_2}'(u) = +\infty$.

În concluzie, Φ_{s_1} şi Φ_{s_2} au aceeaşi derivată pe $\left[0, \frac{\pi}{56}\right]$. Cum $F_{s_1}(0) = F_{s_2}(0) = 0$, iar $F_{s_1}(s_1) = F_{s_2}(s_2) = \frac{\pi}{56}$, deducem că $\Phi_{s_1}(0) = \Phi_{s_2}(0) = 0$, iar $\Phi_{s_1}\left(\frac{\pi}{56}\right) = s_1$, $\Phi_{s_2}\left(\frac{\pi}{56}\right) = s_2$, deci Φ_{s_1} şi Φ_{s_2} nu diferă printr-o constantă. De aici, mulţimea $F = \{\Phi_s; s \ge 1\}$ este o mulţime de funcţii cu aceeaşi derivată pe $\left[0, \frac{\pi}{56}\right]$, diferenţa oricăror două nefiind constantă, ceea ce încheie construcţia exemplului.

*

* *

Prezentăm în cele ce urmează, pe scurt, definiţia derivatelor Dini ale unei funcţii reale [**2**].

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in (a, b)$. Numim *derivata Dini superioară* (respectiv *inferioară*) *la dreapta* a lui f în x_0 numărul $D^+ f(x_0) = \limsup\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (respectiv $D_+ f(x_0) = \liminf\limits_{x \searrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$). Analog se pot defini *derivata Dini superioară*, respectiv *inferioară*, *la stânga* a lui f în x_0, notate $D^- f(x_0)$, respectiv $D_- f(x_0)$.

Privitor la relaţia dintre derivatele Dini şi derivatele clasice ale unei funcţii într-un punct x_0, se poate observa că dacă $D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0)$, atunci f are derivată la dreapta în x_0 în sens clasic şi $f'_+(x_0) = D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0)$, un rezultat asemănător având loc şi pentru derivata la stânga, iar dacă toate cele patru derivate Dini au o valoare comună în x_0, atunci f are derivată în x_0. Este însă de remarcat că oricărei funcţii f i se pot asocia cele patru derivate Dini în x_0, spre deosebire de derivatele laterale clasice.

Indicăm acum extinderile unor rezultate clasice folosind derivate Dini.

Teorema 1. *Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continuă pe (a, b). Dacă $Df = 0$ pe (a, b) cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile, unde D poate fi orice derivată Dini, atunci f este constantă pe (a, b).*

Teorema 2. *Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continuă pe (a, b). Dacă $Df \geq 0$ pe (a, b) cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile, unde D poate fi orice derivată Dini, atunci f este crescătoare pe (a, b).*

Teorema 3. *Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continuă pe (a, b) şi $x_0 \in (a, b)$. Dacă una dintre derivatele Dini este continuă în x_0, la fel sunt şi celelalte trei. În acest caz, toate cele patru derivate Dini în x_0 sunt egale, iar f este derivabilă în x_0.*

Încheiem cu o extindere a rezultatului privitor la funcţiile derivabile cu aceeaşi derivată pe un interval .

Teoema 4. *Fie $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ continue pe (a, b). Dacă Df şi Dg au valori egale şi finite pe (a, b) cu excepţia unei mulţimi cel mult numărabile, unde D poate fi orice derivată Dini, atunci f şi g diferă printr-o constantă pe (a, b).*

Bibliografie

1. M. Ganga - *Manual de matematică: clasa a XI-a*, Mathpress, Ploieşti, 2001.

2. R. Kannan, C. K. Krueger - *Advanced Analysis on the Real Line*, Springer Verlag, New York, 1996.

3. S. Ruziewicz - *Sur les fonctions qui ont la même dérivée et dont la différence n'est pas constante*, Fundamenta Mathematicae 1(1920), 148–151 (accesibil şi în format electronic la adresa http://matwbn.icm.edu.pl/wyszukiwarka.php).