Din nou asupra unei probleme de concurs

Constantin APOSTOL[1]

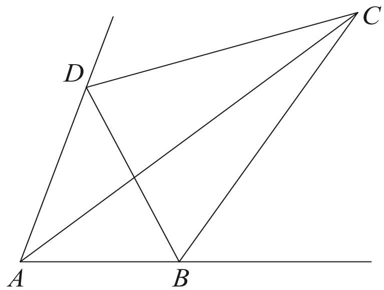
În revista *"Recreaţii matematice"* nr. 2, iulie - decembrie 2004, a apărut articolul profesorilor **D. Mihalache** şi **M. Tetiva**, care "generalizează" o problemă pe care am propus-o la *Concursul Naţional de Matematică "Laurenţiu Duican"* din 15-17 mai 2003, cu următorul enunţ:

În patrulaterul convex $ABCD$, măsurile unghiurilor $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ şi $\widehat{D}$ sunt proporţionale cu numerele 8, 12, 5 *şi* 11. *Să se arate că dacă $(BD$ estre bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.*

Printr-un calcul simplu, din faptul că $\dfrac{m(\widehat{A})}{8} = \dfrac{m(\widehat{B})}{12} = \dfrac{m(\widehat{C})}{5} = \dfrac{m(\widehat{D})}{11}$, deducem că $m(\widehat{A}) = 80°$, $m(\widehat{B}) = 120°$, $m(\widehat{C}) = 50°$, $m(\widehat{D}) = 110°$.

Problema am propus-o pentru clasa a VII-a, aşa că o rezolvare trigonometrică nu era de aşteptat din partea elevilor. Profesorii nominalizaţi mai sus, au dat o elegantă soluţie trigonometrică, care depăşeşte nivelul de pregătire al elevilor, dar au dat şi o soluţie geometrică, la nivelul programei şcolare, care le-a permis şi o "generalizare", în sensul elaborării unor probleme rezolvabile pe aceeaşi idee.

În rândurile care urmează îmi propun să exprim soluţiile cu care am trimis problema comisiei de concurs, care se încadrează cerinţelor programei de concurs şi care este aceeaşi cu a Olimpiadei Naţionale pentru clasa a VII-a.



Soluţia I. Prelungind latura (AB), obţinem că suplementul unghiului $\widehat{ABC}$ are măsura de 60° şi cum $(BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{B}$, care are măsura de 120°, deducem că $(BC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{B}$ din triunghiul ABD.

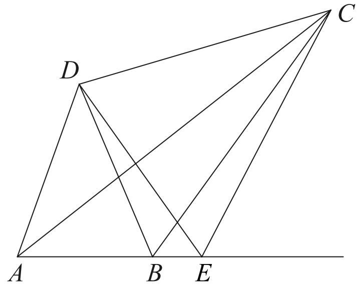
În triunghiul ABD, prin calcul, deducem că $m(\widehat{ADB}) = 40°$ şi, deci, $m(\widehat{BDC}) = 70°$. Suplementul unghiului $\widehat{ADC}$, care se obţine prelungind latura (AD), are 70°. Aşadar, $(DC$ este bisectoarea exterioară a unghiului $\widehat{D}$ în triunghiul ABD.

Astfel, pentru triunghiul ABD, $(BC$ şi $(DC$ sunt bisectoarele exterioare ale unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{D}$; acestea sunt concurente în C. Deducem că $(AC$ este bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{A}$.

Soluţia a II-a. Pe semidreapta $(AB$ luăm punctul E astfel încât $AE = AD$. Vom arăta că $\triangle ADC \equiv \triangle AEC$. Din triunghiul isoscel ADE, cu $m(\widehat{A}) = 80°$, deducem $m(\widehat{ADE}) = m(\widehat{AED}) = 50°$. Rezultă $m(\widehat{EDC}) = 60°$, căci $m(\widehat{ADC}) = 110°$. Dar $(BD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$, deci $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{CBE}) = 60°$.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Al. Vlahuţă", Râmnicu Sărat

Avem, în patrulaterul convex $DBEC$, $m(\widehat{EDC}) =$ $= m(\widehat{EBC}) = 60^\circ$, deci acest patrulater este inscriptibil, de unde deducem că $m(\widehat{CED}) =$ $= m(\widehat{CBD}) = 60^\circ$.



Din $m(\widehat{CED}) = 60^\circ$ şi $m(\widehat{EDC}) = 60^\circ$, deducem că triunghiul CDE este isoscel cu vârful C şi deci, $CD = CE$. Rezultă $\triangle ADC \equiv \triangle AEC$ (LLL); aşadar, $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.

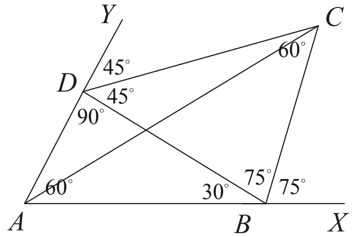
În continuare, voi prezenta o problemă care se poate rezolva cu ideea problemei anterioare:

În patrulaterul convex $ABCD$ măsurile unghiurilor sunt: $m(\widehat{A})=60^\circ$, $m(\widehat{B})=105^\circ$, $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $m(\widehat{D}) = 135^\circ$. Să se arate că dacă $(BD$ este o trisectoare a unghiului $\widehat{D}$, atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$ sau $(CA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{C}$.

Soluţie. Vom deosebi două cazuri:

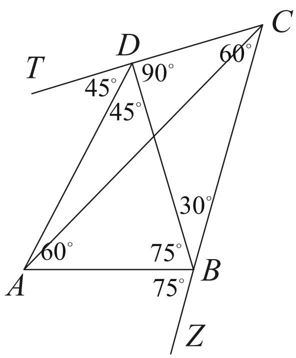
I. când $m(\widehat{CDB}) = \dfrac{m(\widehat{D})}{3} = \dfrac{135^\circ}{3} = 45^\circ$;

II. când $m(\widehat{ADB}) = \dfrac{m(\widehat{D})}{3} = \dfrac{135^\circ}{3} = 45^\circ$.



În cazul I, prelungind latura (AB), obţinem $m(\widehat{CBX}) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, deci $(BC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DBX}$ (1). Prelungind latura (AD), obţinem $m(\widehat{CDY}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, deci $(DC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BDY}$ (2).

Din (1) şi (2), deducem că $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{A}$.



În cazul II, prelungind latura (CB), obţinem $m(\widehat{ABZ}) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$, deci $(BA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DBZ}$ (3).

Prelungind latura (CD), obţinem

$$m(\widehat{ADT}) = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ,$$

deci $(DA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{BDT}$ (4).

Din (3) şi (4), deducem că $(CA$ este bisectoarea unghiului $\widehat{C}$.

Bibliografie

1. **F. Diac** - *A XI-a ediţie a Concursului Naţional de Matematică "Laurenţiu Duican"*, Braşov, 2003, G.M. - 11/2003, 433-438.
2. **D. Mihalache, M. Tetiva** - *Asupra unei probleme de concurs*, RecMat - 2/2004, 111-113.
3. **C. Apostol** - *Preocupări matematice*, Ed. "Radical", 1966.