Teorema ariciului şi câteva aplicaţii

Dumitru MIHALACHE[1]

În aceasta notă ne propunem să prezentăm un rezultat mai puţin vehiculat în literatura matematică românească din ultimii ani, precum şi o aplicaţie oarecum neaşteptată a sa; credem că cititorii interesaţi vor găsi destule alte probleme care să-l folosească. Vom prezenta **teorema ariciului** în mod gradat (denumirea este justificată de aspectul configuraţiilor ce vor apărea); în plan mai întâi pentru triunghi şi apoi pentru poligon oarecare, iar în spaţiu pentru tetraedru şi pe urmă pentru un poliedru arbitrar, cu demonstraţii între care există analogii.

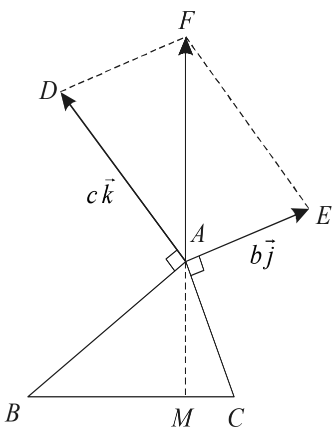
Propoziţia 1. *Fie ABC un triunghi şi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ versori perpendiculari pe dreptele BC, CA, respectiv AB, îndreptaţi spre exteriorul triunghiului. Cu notaţiile uzuale, are loc egalitatea $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}$.*

Demonstaţia I. Notăm $\vec{S}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$; avem că $\vec{S}\cdot a\vec{i}=a^2+ab\,\vec{i}\cdot\vec{j}+ac\,\vec{i}\cdot\vec{k}$. Deoarece unghiul dintre $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ are măsura $180^\circ-m(\widehat{C})$, obţinem că $\vec{i}\cdot\vec{j}=-\cos C$ şi, procedând la fel, analoagele. Folosind identitatea $b\cos C+c\cos B=a$, găsim că

$$\vec{S}\cdot a\vec{i}=a^2-ab\cos C-ac\cos B=a\,(a-b\cos C-c\cos B)=0.$$

Similar, $\vec{S}\cdot b\vec{j}=0$, prin urmare $\vec{S}$ este ortogonal pe doi vectori necoliniari, deci $\vec{S}=\vec{0}$.

Demonstraţia II. Construim, ca în figură, reprezentanţi cu originea în A ai vectorilor $b\vec{j}$ şi $c\vec{k}$, fie aceştia $\overrightarrow{AE}$, respectiv $\overrightarrow{AD}$; fie încă F al patrulea vârf al paralelogramului construit pe aceşti vectori. Se observă atunci că $\triangle ABC\equiv\triangle EFA$ (L.U.L.), deci $AF=BC=a$ şi $\widehat{FAE}\equiv\widehat{ACB}$. De aici, $m(\widehat{MAC})=$ $=180^\circ-m(\widehat{CAE})-m(\widehat{EAF})=90^\circ-m(\widehat{ACB})$, adică $m(\widehat{AMC})=90^\circ$, unde $\{M\}=AF\cap BC$. Urmează că $\overrightarrow{AF}$ este ortogonal pe BC, are lungimea a şi sens opus lui $\vec{i}$, deci $\overrightarrow{AF}=-a\vec{i}$. Pe de altă parte, $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}=b\vec{j}+c\vec{k}$, de unde concluzia.



Să observăm că putem considera că teorema ariciului a fost demonstrată cu prima metodă (sau cu alta, vom vedea că mai există); atunci relaţia $a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}=\vec{0}$ conduce, având în vedere figura de mai sus, la $\overrightarrow{AF}=-a\vec{i}$, i.e. $AF\perp BC$, $AF=BC$, plus o condiţie privind sensul. Prin urmare, putem afirma că, din punct de vedere logic, teorema ariciului pentru triunghi este echivalentă cu următorul enunţ (pb. 45, pg. 49 din [**2**]):

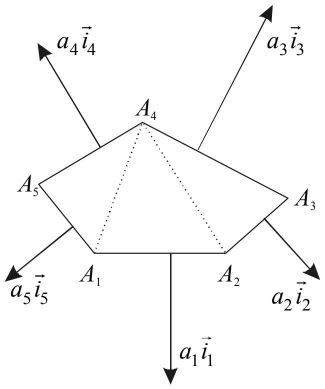
Problema 1. *Se consideră $\triangle ABC$ pe ale cărui laturi $[AB]$ şi $[AC]$ se construiesc în exterior pătratele $ABGD$ şi $ACKE$. Dacă O este mijlocul lui DE, atunci $AO=BC/2$ şi $AO\perp BC$.*

Altfel spus, mediana din A în $\triangle ADE$ este înălţime în $\triangle ABC$; atenţie că şi invers! Şi încă un amănunt: nu trebuie ignorat cazul în care unul din unghiurile $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ este drept sau obtuz.

[1] Profesor, Colegiul Naţional "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

Propoziţia 2. *Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon cu laturile de lungimi $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2$, $\ldots$, $A_nA_1 = a_n$. Pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, pe latura de lungime a_k se construieşte un versor $\vec{i}_k$ orientat spre exteriorul poligonului; atunci $a_1\vec{i}_1 + a_2\vec{i}_2 + \cdots + a_n\vec{i}_n = \vec{0}$.*

Demonstraţie. Să remarcăm că, deşi poate să nu fie convex, se subînţelege că poligonul nu trebuie să aibă autointersecţii; vă convingeţi uşor că pentru o "funditǎ" formată cu două laturi opuse ale unui dreptunghi şi cu diagonalele sale, proprietatea nu are loc (asta dacă reuşiţi să stabiliţi care este interiorul şi care este exteriorul ei!).



Împărţim poligonul în triunghiuri cu interioarele disjuncte, prin diagonale care nu se intersectează. Aplicăm apoi Propoziţia 1 fiecărui triunghi, însumăm relaţiile obţinute şi concluzia urmează dacă ţinem seama de faptul că pe laturile comune pentru câte două triunghiuri (diagonale ale poligonului!) sunt construiţi câte doi vectori cu suma nulă.

Bineînţeles, demonstraţia poate căpăta şi o formă mai tehnică, utilizând metoda inducţiei matematice; lăsăm acest demers în seama cititorului. Să spunem că am dat aceste demonstraţii deoarece în cazul poliedrelor se va observa o temeinică analogie în argumentare. Cazul plan poate fi rezolvat mult mai simplu, chiar în următoarea formă mai generală:

Propoziţia 2′. *Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon şi $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ vectori în planul său, orientaţi către exteriorul poligonului, încât, pentru fiecare $k = \overline{1,n}$, $\vec{v}_k$ are lungimea cât $[A_kA_{k+1}]$ şi formează un acelaşi unghi α cu $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$. Atunci $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdots+\vec{v}_n = \vec{0}$.*

Demonstraţie (aflată de autor de la prof. **Marian Tetiva**, Bârlad). Să observăm că $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ se obţin din $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}, \ldots$, respectiv $\overrightarrow{A_nA_1}$ printr-o rotaţie de acelaşi unghi α. Cum $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_1} = \vec{0}$, la fel şi $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \cdots + \vec{v}_n = \vec{0}$.

Pentru teorema ariciului în spaţiu avem nevoie de următoarea

Lemă. *Fie $A_1A_2A_3A_4$ un tetraedru; notăm cu S_k aria feţei opuse vârfului A_k şi cu α_{hk} unghiul feţelor de arii S_h şi S_k, format spre interiorul tetraedrului. Atunci are loc egalitatea $S_1 = S_2\cos\alpha_{12} + S_3\cos\alpha_{13} + S_4\cos\alpha_{14}$.*

Demonstraţie. Considerăm întâi că A_1 se proiectează pe planul $(A_2A_3A_4)$ în punctul H interior $\triangle A_2A_3A_4$. Atunci $S_{HA_3A_4} = S_2\cos\alpha_{12}$, $S_{HA_2A_4} = S_3\cos\alpha_{13}$, $S_{HA_2A_3} = S_4\cos\alpha_{14}$ şi $S_{HA_3A_4} + S_{HA_2A_4} + S_{HA_2A_3} = S_1$, de unde concluzia. Raţionamentul este analog în cazul în care $H \notin \operatorname{Int} A_2A_3A_4$.

Să observăm analogia cu egalitatea $b\cos C + c\cos B = a$ din cazul triunghiului.

Propoziţia 3. *Cu notaţiile din lemă, fie versorii $\vec{i}_k$, $k = \overline{1,4}$, ortogonali respectiv pe feţele de arii S_k şi orientaţi spre exteriorul tetraedrului. Atunci*

$$S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + S_3\vec{i}_3 + S_4\vec{i}_4 = \vec{0}.$$

Demonstraţia pe care o dăm este după [**3**] şi decurge la fel cu aceea a Propoziţiei 1. Notăm aşadar $\vec{S} = S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + S_3\vec{i}_3 + S_4\vec{i}_4$ şi, folosind Lema, obţinem

că
$$\vec{S}\cdot S_1\vec{i}_1 = S_1^2 - S_1S_2\cos\alpha_{12} - S_1S_3\cos\alpha_{13} - S_1S_4\cos\alpha_{14} = 0$$
şi încă trei relaţii analoage. Fiind ortogonal pe trei vectori necoplanari, vectorul $\vec{S}$ este în mod necesar $\vec{0}$.

Propoziţia 4. *Fie un poliedru convex cu ariile feţelor $S_1, S_2, \dots, S_n$ $(n \geq 4)$. Pe planul feţei de arie S_k se construieşte versorul $\vec{i}_k$ perpendicular, orientat spre exteriorul poliedrului. Are loc relaţia $S_1\vec{i}_1 + S_2\vec{i}_2 + \cdots + S_n\vec{i}_n = \vec{0}$.*

Demonstraţie. Partiţionăm poliedrul în tetraedre cu interioarele disjuncte, oricare două tetraedre având în comun cel mult o faţă. Pentru fiecare tetraedru construim vectorii perpendiculari pe planele feţelor, spre exterior, de lungimi egale cu ariile feţelor respective. Aplicăm pentru fiecare tetraedru Propoziţia 3 şi ţinem seama că pe fiecare faţă a tetraedrelor care nu este faţă a poliedrului iniţial sunt construiţi doi vectori care se anulează reciproc.

O altă demonstraţie a teoremei ariciului pentru tetraedre poate fi găsită în [**3**] şi utilizează produsul vectorial, iar o frumoasă demonstraţie în cazul general apare în [**4**], bazată pe ideea că suma proiecţiilor vectorilor pe orice dreaptă este nulă (pb. *M119* din *Kvant*). În spaţiu, o demonstraţie analoagă cu cea a Propoziţiei 2′ nu se poate găsi.

Folosind Propoziţia 3, putem obţine valabilitatea următorului enunţ (de altfel, credem că ele sunt echivalente), care reprezintă extinderea în spaţiu a Problemei 1:

Problema 2. *Cu notaţiile din lemă, construim punctul B_2 de cealaltă parte a planului $(A_1A_2A_3)$ decât A_2 şi astfel încât $A_1B_2 \perp (A_1A_3A_4)$, iar A_1B_2 este numeric egal cu S_2. Analog construim B_3 şi B_4, apoi paralelipipedul $A_1B_2B_3'B_4B_3B_4'A_1'B_2'$ pe vectorii $\overrightarrow{A_1B_2}$, $\overrightarrow{A_1B_3}$, $\overrightarrow{A_1B_4}$. Atunci $A_1A_1' \perp (A_2A_3A_4)$ şi $A_1A_1' = S_1$.*

În încheiere, propunem rezolvarea următoarelor probleme:

1. Deduceţi, cu teorema ariciului, că fiecare latură a unui poligon este mai mică decât suma celorlaltor laturi; generalizare în spaţiu. Este reciproca adevărată?

2. Demonstraţi *teoremele cosinusurilor* pentru tetraedru:
$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 - 2S_2S_3\cos\alpha_{23} - 2S_2S_4\cos\alpha_{24} - 2S_3S_4\cos\alpha_{34};$$
$$S_1^2 + S_2^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} = S_3^2 + S_4^2 - 2S_3S_4\cos\alpha_{34}.$$
Arătaţi că aceste egalităţi sunt valabile şi dacă S_1, S_2, S_3, S_4 sunt lungimile laturilor unui patrulater (redefinind α_{hk}).

3. Rezolvaţi Problema 2 sintetic (sau pe orice altă cale) şi obţineţi astfel echivalenţa logică dintre Problema 2 şi Propoziţia 3.

Bibliografie

1. **D. Brânzei, S. Aniţa, C. Cocea** - *Planul şi spaţiul euclidian*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
2. **J. Hadamard** - *Lecţii de geometrie elementară. Geometrie plană*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1960.
3. **M. Miculiţa** - *Introducere în geometria tetraedrului*, Ed. Mined, Iaşi, 1994.
4. *Probleme din revista KVANT* (traduse şi selectate de **H. Banea**), E. D. P., Bucureşti, 1983.