

## Comentarii asupra unui exercițiu

**Dan PLĂEȘU**<sup>1</sup>

**Exercițiu.** Fie numerele naturale nenule  $a, b$ . Să se demonstreze echivalența:

$$19 \mid (5a + 4b) \Leftrightarrow 19 \mid (9a + 11b).$$

**Soluție (tip "culegere").** 1)  $19 \mid (5a + 4b) \Rightarrow 19 \mid 11(5a + 4b) \Rightarrow$   
 $19 \mid (55a + 44b) \Rightarrow 19 \mid [19a + 4(9a + 11b)] \Rightarrow 19 \mid 4(9a + 11b) \stackrel{(19,4)=1}{\Rightarrow} 19 \mid (9a + 11b).$   
2)  $19 \mid (9a + 11b) \Rightarrow 19 \mid 5(9a + 11b) \Rightarrow 19 \mid (45a + 55b) \Rightarrow$   
 $19 \mid [19b + 9(5a + 4b)] \Rightarrow 19 \mid 9(5a + 4b) \stackrel{(19,9)=1}{\Rightarrow} 19 \mid (5a + 4b).$

### Comentariu metodic

Se poate pune, firesc, întrebarea: *prin care raționament s-a ajuns la concluzia că expresia  $5a + 4b$  trebuie înmulțită cu 11, iar  $9a + 11b$  cu 5?* Prezentăm în cele ce urmează un punct de vedere în această privință.

Determinăm numerele naturale  $n, x, y, z \neq 0$  astfel încât să avem:

$$n(5a + 4b) = 19(xa + yb) + z(9a + 11b).$$

Comparând coeficienții lui  $a$  și  $b$  obținem:

$$\begin{cases} 19x + 9z = 5n \\ 19y + 11z = 4n \end{cases}.$$

Înmulțind prima relație cu 4 și a doua cu 5 și scăzând membru cu membru, obținem  $76x - 95y = 19z$ , de unde, prin împărțirea la 19, rezultă:

$$4x - 5y = z.$$

Dăm lui  $x$  și  $y$  acele valori pentru care expresia  $x + y + z$  este minimă și  $z \neq 0$ . (Minimalitatea expresiei precedente nu este necesară ci recomandată pentru simplificarea calculelor!). Astfel, considerând  $x = 1, y = 0$  obținem  $z = 4$ . Rezultă  $n = 11$  și, deci, egalitatea:

$$11(5a + 4b) = 19a + 4(9a + 11b).$$

În mod analog, pentru demonstrarea implicației reciproce, determinăm numerele naturale  $n, x, y, z \neq 0$  astfel încât să avem:

$$n(9a + 11b) = 19(xa + yb) + z(5a + 4b).$$

Efectuând calculele, se obține  $z = -11x + 9y$ . Rezultă, luând  $x = 0, y = 1$ , că  $z = 9$  și  $n = 5$ . Deci, avem:

$$5(9a + 11b) = 19b + 9(5a + 4b).$$

**Observație.** Raționamentele sunt valabile și pentru numere întregi!

În încheiere, propunem cititorilor demonstrarea următoarelor echivalențe:

- 1)  $11 \mid (2a + 5b) \Leftrightarrow 11 \mid (3a + 2b),$
- 2)  $23 \mid (2a + 3b) \Leftrightarrow 23 \mid (9a + 2b),$
- 3)  $19 \mid (11a + 2b) \Leftrightarrow 19 \mid (18a + 5b).$

---

<sup>1</sup> Profesor, Școala Normală "Vasile Lupu", Iași