Metode şi procedee de rezolvare a problemelor de maxim sau de minim

Gheorghe CROITORU[1]

Ne propunem în cele ce urmează să prezentăm, prin exemple, o serie de procedee şi metode prin care pot fi soluţionate problemele de maxim sau de minim. Rezolvarea pe mai multe căi a unei aceleiaşi probleme va permite cititorului să compară eficienţa acestora, precum şi să aleagă contextul cel mai potrivit pentru aplicarea uneia sau alteia dintre ele.

Problema 1. *Să se afle minimul expresiei* $E(x) = x^2 + \dfrac{a^3}{x}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, *unde* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *este dat.*

Soluţia 1. Aplicând inegalitatea mediilor, obţinem că

$$E(x) = \frac{x^3 + a^3}{x} = \frac{x^3 + \dfrac{a^3}{2} + \dfrac{a^3}{2}}{x} \geq \frac{3\sqrt[3]{x^3 \cdot \dfrac{a^3}{2} \cdot \dfrac{a^3}{2}}}{x} = \frac{3\sqrt[3]{2}a^2}{2},$$

egalitatea fiind atinsă atunci când $x^3 = \dfrac{a^3}{2}$, i.e. $x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Urmează că $E_{\min} = \dfrac{3\sqrt[3]{2}a^2}{2}$.

Soluţia 2. Se ştie că, dacă $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ şi suma $x + y = const$, atunci produsul $x^m y^n$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ este maxim pentru $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n}$; dual, dacă $x^m y^n = const$, atunci suma $x + y$ este minimă pentru $\dfrac{x}{m} = \dfrac{y}{n}$ (aceste afirmaţii se extind la un număr finit de termeni / factori şi la cazul în care exponenţii sunt din $\mathbb{Q}_+^*$).

Întrucât $x^2 \left(\dfrac{a^3}{x}\right)^2 = a^6 = const$, urmează că $E(x)$ are valoare minimă atunci când $x^2 = \dfrac{a^3}{2x} \Leftrightarrow x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Se obţine $E_{\min} = E\left(\dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}\right) = \dfrac{3\sqrt[3]{2}a^2}{2}$.

Soluţia 3. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(x)$. Extremele acestei funcţii se pot găsi folosind prima derivată. Avem că $f'(x) = \dfrac{2x^3 - a^3}{x^2}$, care se anulează pentru $x = \dfrac{a}{\sqrt[3]{2}}$. Tabelul de variaţie este prezentat alăturat.

x	0		$\frac{a}{\sqrt[3]{2}}$		∞
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	∞	$\searrow$	$E_{\min}$	$\nearrow$	∞

Problema 2. *Aflaţi valorile extreme ale expresiei* $E(x) = \dfrac{\sin x - 3}{\cos x + 2}$, $x \in \mathbb{R}$.
(**Paul Georgescu, Gabriel Popa,** *Problema 24739*, G.M. 9/2002)

Soluţia 1. Pentru $x \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, notând $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, obţinem că $E = \dfrac{-3t^2 + 2t - 3}{t^2 + 3}$, $t \in \mathbb{R}$. Pentru a afla mulţimea valorilor lui E, fie $y = \dfrac{-3t^2 + 2t - 3}{t^2 + 3}$, $t \in \mathbb{R}$, deci $t^2(y+3) - 2t + (3y+3) = 0$, unde $t \in \mathbb{R}$. Se impune condiţia $\Delta \geq 0$, ceea

[1] Profesor, Liceul Teoretic "Al. I. Cuza", Iaşi

ce conduce la $y \in \left[-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Pe de altă parte, $E\left((2k+1)\pi\right) = -1 \in$ $\in \left(-2-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$. Urmează că $E_{\min} = -2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, iar $E_{\max} = -2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (se dovedeşte uşor faptul că aceste valori extreme sunt efectiv atinse).

Soluţia 2. Definim punctele $M(\cos x, \sin x)$, $A(-2, 3)$; atunci $E(x)$ este tocmai panta dreptei AM. Pentru $x \in \mathbb{R}$, M parcurge cercul trigonometric şi cum A este în exteriorul acestui cerc, urmează că valorile extreme ale lui $E(x)$ sunt atinse atunci când AM este una dintre tangentele duse din A la cerc. Fie $d : y - 3 = m(x+2)$ ecuaţia unei drepte prin A; aceasta este tangentă la $\mathcal{C}(0,1)$ când $dist(O,d) = 1$. Folosind formula care dă distanţa de la un punct la o dreaptă, obţinem

$$\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow 3m^2 + 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow m \in \left\{-2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

În concluzie, $E_{\min} = -2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, iar $E_{\max} = -2+\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Soluţia 3. Putem evident utiliza derivata întâi în studiul funcţiei ataşate expresiei $E(x)$.

Problema 3. *Dintr-o bară metalică de formă cilindrică se obţine prin strunjire o bară paralelipipedică. Să se determine dimensiunile dreptunghiului de secţiune astfel încât pierderea de material să fie minimă.*

Soluţia 1. Notând cu x şi y dimensiunile dreptunghiului şi cu R raza cilindrului, problema revine la a găsi maximul funcţiei $f(x,y) = xy$, în condiţiile $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = 4R^2$. Însă, cum x, y sunt pozitive, produsul xy este maxim odată cu produsul x^2y^2. Deoarece suma $x^2 + y^2$ este constantă, x^2y^2 este maxim pentru $x^2 =$ $= y^2 = 2R^2$. Dimensiunile dreptunghiului căutat sunt, prin urmare, $x = y = R\sqrt{2}$.

Soluţia 2. Studiul funcţiei $f(x,y) = xy$ pentru $x, y > 0$, $x^2 + y^2 = 4R^2$ revine la studiul funcţiei $g(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $x \in (0, 2R)$ şi acesta se face apelând la derivata g'.

Soluţia 3. Când se caută extremele unei funcţii $f(x,y)$, între variabile existând o legătură de forma $\varphi(x,y) = 0$, se aplică în general *metoda multiplicatorilor lui Lagrange*. Dacă f, φ sunt de clasă C^1, considerăm funcţia auxiliară

$$F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Punctul (x_0, y_0) din domeniul lui f este punct de extrem al acestei funcţii dacă şi numai dacă (x_0, y_0) este soluţie a sistemului

$$F'_x(x,y) = 0, \quad F'_y(x,y) = 0, \quad \varphi(x,y) = 0,$$

iar egalităţile $\varphi'_x(x_0, y_0) = 0$, $\varphi'_y(x_0, y_0) = 0$ nu sunt satisfăcute simultan.

În cazul nostru, $F(x,y) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4R^2\right)$ şi avem de rezolvat sistemul

$$y + 2\lambda x = 0, \quad x + 2\lambda y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4R^2 = 0,$$

neadmiţând soluţiile pentru care $2x = 2y = 0$. Obţinem imediat că $x = y = R\sqrt{2}$.

Problema 4. *Două oraşe A, B sunt situate respectiv la 10 km şi 15 km de un râu rectiliniu, iar proiecţia lungimii AB pe direcţia râului este de 20 km. Cele două oraşe trebuie alimentate cu apă de la o uzină amplasată pe marginea râului. Se cere* *poziţia uzinei pentru care lungimea conductelor ce o leagă de cele două oraşe să fie minimă.*

Soluţia 1. Dacă A'' este simetricul lui A faţă de direcţia râului, iar M este poziţia uzinei, evident că $[AM] \equiv [A''M]$, deci $AM + MB = A''M + MB$. Această din urmă sumă este minimă când A'', M, B sunt puncte coliniare; punctul M de amplasare a uzinei astfel obţinut se caracterizează prin congruenţa unghiurilor α, β făcute de MA, respectiv MB cu normala la direcţia râului (v. figura 1).

Notând $x = A'M$, din $\triangle MAA' \sim \triangle MBB'$ obţinem că

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{A'M}{MB'} \Leftrightarrow \frac{10}{15} = \frac{x}{20 - x} \Leftrightarrow x = 8 \text{ (km)}.$$

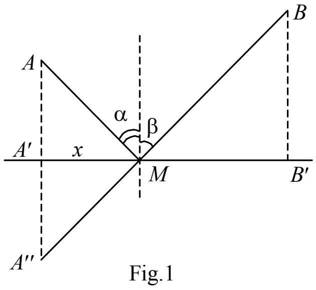

Fig.1

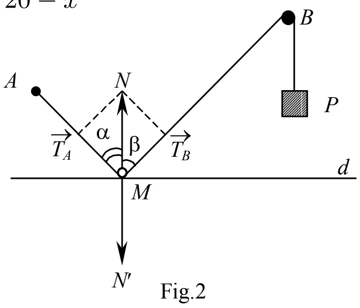

Fig.2

Soluţia 2. Un fir inextensibil de lungime suficient de mare este fixat în A, trecut printr-un inel M ce poate culisa pe direcţia d şi apoi printr-un mic scripete aflat în B. Capătul liber are ataşată o greutate P, care la echilibru se va afla cât mai aproape de sol, minimizând astfel lungimea $MA + MB$. În această poziţie de echilibru, tensiunile $\overrightarrow{T_A}$ şi $\overrightarrow{T_B}$ care acţionează în fire sunt egale în modul, paralelogramul forţelor este romb, deci punctul căutat M este determinat din nou de congruenţa unghiurilor α şi β.

Soluţia 3. Locul geometric al punctelor X pentru care $XA + XB = const$ este o elipsă de focare A şi B. Considerând fasciculul de elipse omofocale (de focare A şi B), punctul căutat M este dat de intersecţia cu d a acelei elipse din fascicul ce este tangentă la d. Proprietatea optică a elipsei asigură din nou congruenţa unghiurilor α şi β.

Soluţia 4. Cu notaţiile din Soluţia 1, $AM = \sqrt{100 + x^2}$, $MB = \sqrt{225 + (20 - x)^2}$ şi avem de determinat minimul funcţiei $f(x) = \sqrt{100 + x^2} + \sqrt{225 + (20 - x)^2}$, $x \in [0, 20]$.

Notă. Există multe alte procedee şi metode de abordare a problemelor de extrem; menţionăm, pentru importanţa lor, metodele programării liniare şi pe cele ale grafurilor. Pentru alte aplicaţii, poate fi consultată bibliografia.

Bibliografie.

1. **M. Cerchez** - *Aplicaţii ale matematicii în practică*, E.D.P., Bucureşti, 1975.
2. **A. Leonte, C. Niculescu** - *Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică*, Ed. "Scrisul Românesc", Craiova, 1981.
3. **C. Udrişte, E. Tănăsescu** - *Minime şi maxime ale funcţiilor reale de variabile reale*, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980.
4. *Gazeta Matematică* (colecţie).