# Funcții care admit / nu admit primitive

***Dumitru GĂLEATĂ*** [1] *și* ***Gabriel POPA*** [2]

Ne propunem în ceea ce urmează o abordare cât mai intuitivă a unor probleme considerate în general ca fiind „dificile”, grupate în următoarele clase:

*I. Dată o funcție, să se stabilească faptul că admite primitive;*

*II. Dată o funcție, să se arate că nu admite primitive;*

*III. Dată o funcție a cărei expresie depinde de anumiți parametri, să se determine valorile acestora astfel încît funcția să admită primitive.*

În redactarea acestui articol am pornit de la constatarea că soluțiile date în diverse cărți unora dintre problemele din [**2**], pag. 13-14, sunt artificiale şi greu de urmărit de către elevi. Propunem în cele ce urmează o prezentare pe care o credem logică şi adecvată predării la clasă.

**I.** ***(i) Orice funcție continuă admite primitive.***

**Problema 1.** *Funcția* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^5}e^{\frac{-1}{x^2}} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ *admite primitive.*

**Soluție.** Substituția $\dfrac{1}{x^2}=t$ conduce la $\dfrac{1}{x^5}=t^{\frac{5}{2}}$ dacă $x>0$ şi $\dfrac{1}{x^5}=-t^{\frac{5}{2}}$ dacă $x>0$, deci $\lim\limits_{x\downarrow 0}f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^{\frac{5}{2}}}{e^t}=0$ ; $\lim\limits_{x\uparrow 0}f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-t^{\frac{5}{2}}}{e^t}=0$, de unde $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=$ *f*(0), adică $f$ este continuă în 0. Cum $f$ este evident continuă pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,\infty)$, rezultă că $f$ continuă pe $\boldsymbol{R}$, deci $f$ admite primitive.

**Problema 2.** *Funcțiile* $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ *și* $g:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, $g(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$ *admit primitive.*

**Soluție.** Pentru *f*, avem $\left|x\sin\dfrac{1}{x}-0\right|\leq|x|\xrightarrow{x\to 0}0$, deci $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$, adică $f$ este continuă . Analog se procedează pentru $g$ .

***(ii) Anumitor funcții li se pot construi efectiv primitivele.***

[1] Profesor, Grup Școlar “Ștefan Procopiu”, Iași
[2] Profesor, Liceul Teoretic “Garabet Ibrăileanu”, Iași

**Problema 3.** *Funcţiile* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *şi* $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$g(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

**Soluţie.** Considerăm funcţia $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$, care este derivabilă pe $\boldsymbol{R}^*$ şi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in \boldsymbol{R}^*$. Să mai arătăm că $F$ este derivabilă în origine, iar $F'(0) = 0$:

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \quad \sin\frac{1}{x} = 0$$

(vezi Problema 2), deci $F$ este primitivă a lui $f$. Analog se procedează pentru $g$.

**Generalizare 1.** *Funcţiile* $f_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_n(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{n-2}\cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *şi*

$g_n$: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g_n(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\cos\frac{1}{x} + x^{n-2}\sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive,* $\forall n \geq 2$.

**Generalizare 2.** *Funcţiile* $f_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$,

$f_n(x)=\begin{cases} (n+1)x^n\sin\frac{1}{x^n} - n\cos\frac{1}{x^n} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$

*şi* $g_n : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g_n(x)=\begin{cases} (n+1)x^n\cos\frac{1}{x^n} + n\sin\frac{1}{x^n} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive,* $\forall n \geq 1$.

***(iii) O combinaţie liniară a unor funcţii ce admit primitive, admite primitive.***

**Problema 4.** *Funcţiile* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *şi* $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x)=$

$=\begin{cases} \cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

**Soluţie.** Funcţia $f$ se poate scrie ca o combinaţie liniară cu coeficienţii $-2$, 1 a funcţiilor $g$ din Problemele 2 şi 3, deci admite primitive. Analog pentru $g$.

**Observaţia 1.** Dacă $F$ este o primitivă a funcţiei $f$, atunci funcţia $f(\frac{x}{\alpha})$ admite primitiva $\alpha F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

**Observația 2.** Funcțiile $f$ și $g$ sînt exemple de funcții necontinue (cu discontinuitate de specia a doua în origine) care admit primitive.

**Problema 5.** *Funcțiile* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)= \begin{cases} \sin^2 \frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ *și* $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x)= \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

**Soluție.** Avem $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos\frac{2}{x}) & ,x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\begin{cases} \cos\frac{2}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ și analog pentru $g$.

**Problema 6.** *Funcțiile* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)= \begin{cases} \sin^3 \frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *și* $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x)= \begin{cases} \cos^3 \frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admit primitive.*

**Soluție.** $\sin\frac{3}{x} = 3\sin\frac{1}{x} - 4\sin^3\frac{1}{x}$, deci $f(x) = \frac{3}{4}\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases} - \frac{1}{4}\begin{cases} \sin\frac{3}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$, fiecare dintre funcțiile din dreapta admițând primitive cf. Problemei 4 și Observației 1.

**Generalizare.** *Funcția* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x)= \begin{cases} \sin^{2n+1} \frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *admite primitive* (O.M.,etapa județeană, 1982).

**II.** ***(i) Funcțiile care nu au P.D. nu admit primitive.*** În acest sens, ținând seama de proprietățile unei funcții cu P.D., putem proceda în mai multe moduri:

- Dacă $Im\, f$ nu este interval, atunci $f$ nu admite primitive;
- Dacă $f$ are discontinuități de specia I , atunci $f$ nu admite primitive.

**Problema 7.** *Funcția* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = [x]$ *nu admite primitive.*

**Soluție.** $Im\, f = \boldsymbol{Z}$, care nu este interval.

**Problema 8.** *Funcția* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = x - [x] = \{x\}$ *nu admite primitive.*

**Soluție.** Pentru $k \in \boldsymbol{Z}$, avem $\lim\limits_{x \uparrow k} f(x) = 1, \lim\limits_{x \downarrow k} f(x) = 0$, deci $f$ are discontinuități de specia I.

**Problema 9.** *Funcția* $h : (a,b) \to \boldsymbol{R}$, $h(x)= \begin{cases} f(x) & ,x \in (a,b) \cap Q \\ g(x) & ,x \in (a,b) / Q \end{cases}$, *cu* $f$ *și* $g$

*funcții continue distincte, nu admite primitive* (O.M., etapa finală, 1981).

**Soluție.** Cum $f \neq g$, există $x_0 \in (a, b)$ a.î. $f(x_0) \neq g(x_0)$. Cum $\boldsymbol{R}$ este separat Hausdorff, putem alege $V_f \in V(f(x_0))$ și $V_g \in V(g(x_0))$ a.î. $V_f \cap V_g = \varphi$. Deoarece $f, g$ sunt continue, există $U_f, U_g \in V(x_0)$ (pe care le putem presupune intervale deschise) a.î. $\forall x \in (a, b) \cap U_f \Rightarrow f(x) \in V_f$ *și* $\forall x \in (a, b) \cap U_g \Rightarrow g(x) \in V_g$. Observăm acum că $(a, b) \cap U_f \cap U_g$ este un interval, iar imaginea sa prin $h$ este o reuniune de mulțimi disjuncte incluse în $V_f$ respectiv $V_g$, care nu poate fi interval.

**Observație.** Particularizând convenabil funcțiile $f$ și $g$, obținem soluții pentru problemele II.5, 6, pag. 13 din [**2**].

***(ii) Pentru anumite funcții, putem demonstra efectiv că nu admit primitive.***

**Problema 10.** *Funcția* $f_1 : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f_1(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ *nu admite primitive* (v. și Problema 3).

**Soluție.** Observăm că $\left(x \sin\frac{1}{x}\right)' = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$, deci o eventuală primitivă a lui $f_1$ are în mod necesar forma $F(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} + c_1 & ,x \neq 0 \\ c_2 & ,x = 0 \end{cases}$. Cum $F$ trebuie să fie continuă, atunci $c_1 = \lim\limits_{x\to 0} F(x) = F(0) = c_2$, deci $c_1 = c_2$. Funcția $F$ trebuie să fie derivabilă, deci există limita $\lim\limits_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$, ceea ce nu este posibil. Urmează că $f_1$ nu admite primitive.

***(iii) Reducere la absurd.***

**Problema 11.** *Funcția* $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ *nu admite primitive.*

**Soluție.** Presupunem că $f$ ar admite primitive. Cum funcția $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$ admite primitive (v. Problema 4), atunci diferența lor admite primitive, deci funcția $h(x) = f(x) - g(x) = \begin{cases} 0 & ,x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \end{cases}$ admite primitive. Însă $Im\, h = \{0, \frac{1}{2}\}$ nu este interval, deci $h$ nu admite primitive. Presupunerea făcută este falsă.

**Observația 1.** Problema de mai sus furnizează un exemplu de funcție cu P.D. care nu admite primitive.

**Observația 2.** Putem da, folosind acest raționament, nenumărate exemple de funcții cu ramuri care nu admit primitive. De altfel, în unele culegeri de teste grilă în vederea pregătirii a diverse examene, se întâlnesc probleme de forma:

„*Funcţia* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \\ a & , x = 0 \end{cases}$ *admite primitive d.n.d.* $a = \ldots$“

Elevii trebuie obişnuiţi să „simtă“ valoarea potrivită a constantei încă înainte de a trece la rezolvarea propriu-zisă a problemei !

**III.** Apar deseori aplicaţii de tipul:

**Problema 12.** *Se consideră funcţia* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} ae^x & , x \leq 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x} - b}{x} & , x > 0 \end{cases}$ *cu* $a, b \in \mathbf{R}$. *Determinaţi* $a, b$ *a.î.* $f$ *să admită primitive.*

Metoda uzuală de abordare a unor astfel de probleme este căutarea primitivelor lui $f$ pe ramuri, considerarea unei primitive $F$ sub forma generală

$$F(x) = \begin{cases} ae^x + c_1 & , x < 0 \\ c_2 & , x = 0 \\ 2\sqrt{x+1} + \ln \dfrac{x}{x^b(1+\sqrt{x+1})^2} + c_3 & , x > 0 \end{cases}$$

şi determinarea apoi a constantelor $a$ şi $b$ a.î. $F$ să fie continuă şi derivabilă.

Propusă pentru prima oară în clasă, problema primeşte însă de obicei următoarea rezolvare: „Pentru ca $f$ să admită primitive, trebuie ca $f$ să fie continuă şi putem afla $a, b$ din continuitatea lui $f$“. Lăsând la o parte confuzia care se face între condiţia necesară şi cea suficientă, în contextul dat un astfel de răspuns nu este chiar atât de greşit. În [**4**] este enunţat şi parţial demonstrat următorul rezultat (Problema 10, pag. 118):

**Teoremă.** *Fie* $I$ *un interval,* $x_0$ *punct interior lui* $I$, *iar* $f: I \to \mathbf{R}$ *o funcţie cu P.D. Dacă* $f$ *are limite laterale în* $x_0$, *atunci* $f$ *este continuă în* $x_0$.

**Demonstraţia** dată în [4] este valabilă numai în cazul limitelor laterale finite (adică al discontinuităţilor de specia I), însă ea poate fi adaptată şi în cazul general. Presupunem, prin reducere la absurd, că $f(x_0 - 0) < f(x_0)$ (limita putând fi finită sau $-\infty$) şi fie $\alpha$ un număr între cele două valori. Atunci $\forall V \in V(f(x_0 - 0)), \exists U \in V(x_0)$ a.î. $\forall x \in U$, $x < x_0 \Rightarrow f(x) \in V$. Considerând $V = (f(x_0 - 0), \alpha)$, există $U$ – pe care o putem lua $U = [a, x_0)$ – a.î. $\forall x \in U \Rightarrow f(x) \in V$; altfel spus, $f(x) < \alpha, \forall x \in [a, x_0)$. Rezultă că $f$ nu ia valoarea $\alpha$ pentru $x \in [a, x_0]$, fals.

Revenind la Problema 12, $f$ admite primitive, deci are P.D. În plus, $f$ are limite laterale în 0 : $f(0 - 0) = a$, iar $f(0 + 0) = \begin{cases} \pm\infty & , b \neq 1 \\ \dfrac{1}{2} & , b = 1 \end{cases}$. Din teorema de mai sus, rezultă că $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$.

**Bibliografie**


**1. V. Arsinte** – *Probleme elementare de calcul integral* , Ed. Univ. Bucureşti, 1995.
**2. N. Boboc, I. Colojoară** – *Analiză matematică* , manual cl. a XII-a, E.D.P., 1999.
**3. M. Ganga** – *Elemente de analiză matematică* , cl. a XII-a, Ed. Mathpress, 1999.
**4. Gh. Gussi et al.** – *Analiză matematică* , manual cl. a XI-a, E.D.P., 1999.