Funcţia polinomială de gradul al doilea - probleme clasice -

Mihai GÂRŢAN[0]

Se numeşte funcţie polinomială de gradul al doilea, funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 .$$

Notând $\Delta = b^2 - 4ac$ (discriminantul ecuaţiei de gradul doi $f(x) = 0$), se găseşte că mulţimea valorilor funcţiei $f = f(x)$ este intervalul $[-\Delta / 4a, +\infty)$ în cazul $a > 0$, respectiv $(-\infty, -\Delta / 4a]$ în cazul $a < 0$.

Într-un sistem cartezian de axe din planul variabilelor x şi y, graficul funcţiei $y = f(x)$ este o curbă, numită *parabolă*. Vârful parabolei, notat de obicei cu litera V, are coordonatele $x = -b/2a$, $y = -\Delta/4a$. Dreapta de ecuaţie $x = -b/2a$ este axa de simetrie a parabolei, iar valoarea $x = -b/2a$ este punct de extrem al funcţiei $f(x)$ şi anume punct de minim în cazul $a > 0$, respectiv punct de maxim în cazul $a < 0$.

1. Determinarea funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, când sunt satisfăcute anumite condiţii.

a) Determinarea funcţiei când se cunosc trei puncte ale graficului ei.

Exemplu. Determinaţi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ştiind că punctele $M_1(1,4)$, $M_2(2,9)$ şi $M_3(-1,6)$ aparţin graficului.

Soluţie: din ipoteză, rezultă $f(1) = 4, f(2) = 9$ şi $f(-1) = 6$. Se obţine sistemul:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ 4a + 2b + c &= 9 \\ a - b + c &= 6 \end{aligned}$$

Rezolvând acest sistem, găsim $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, deci $f(x) = x^2 - x + 3$.

b) Determinarea funcţiei când se cunosc coordonatele vârfului parabolei şi ale unui alt punct al graficului.

Exemplu. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ştiind că vârful parabolei asociate este $V(1,2)$ şi că parabola trece prin punctul $M(2,-3)$.

Soluţie: avem $f(1) = 2$, $f(2) = -3$ şi $b/2a = 1$. Se obţine sistemul :

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \\ 4a + 2b + c &= -3 \\ 2a + b &= 0 \end{aligned}$$

care are soluţia unică $a = -5, b = 10, c = -3$, deci $f(x) = -5x^2 + 10x - 3$.

[0] *Profesor, Liceul Internat "C. Negruzzi" Iaşi*

2. Studiul unor familii de funcţii ce depind de un parametru.

a) Studiul poziţiei vârfurilor parabolelor asociate faţă de axa Ox sau faţă de paralela la axa Ox de ecuaţie $y = \beta$.

Exemplu. Determinaţi valorile parametrului real m astfel încât vărfurile parabolelor asociate familiei de funcţii $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_m(x) = x^2 - mx + 1$ să se afle sub dreapta de ecuaţie $y = -3$.

Soluţie: avem $\Delta = m^2 - 4$, $a = 1$ şi impunem condiţia $-\Delta/4a < -3$. Rezultă $\mathrm{m}^2 - 16 > 0$, echivalent cu $\mathrm{m} \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$.

b) Studiul poziţiei parabolelor asociate faţă de axa Ox sau faţă de o paralelă la axa Ox

Exemplu. Studiaţi poziţia parabolelor asociate familiei de funcţii $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_m(x) = x^2 - x + m$, faţă de dreapta de ecuaţie $y = 1$.

Soluţie: Se va studia semnul trinomului $T_m(x) = f_m(x) - 1$, adică $T_m(x) = x^2 - x + m - 1$, pentru care $\Delta = 5 - 4m$.

(1) Dacă $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (5/4, +\infty)$,rezultă $T_m(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, adică parabolele asociate sunt situate deasupra dreptei de ecuaţie $y = 1$.

(2) Dacă $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 5/4$, parabola asociată are vârful pe dreapta $y = 1$ şi este situată deasupra acestei drepte.

(3) Dacă $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 5/4$, $T_m(x)$ are două rădăcini reale distincte, care sunt abscisele punctelor de intersecţie ale parabolei respective cu dreapta $y = 1$. Vârful acestor parabole se află sub această dreaptă.

c) Locul geometric al vârfurilor parabolelor asociate unei familii de funcţii (de gradul doi).

Exemplu. Să se afle locul geometric al vârfurilor parabolelor asociate familiei de funcţii $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2x + 1, m \neq 0$.

Soluţie: Vârful unei parabole având coordonatele $x = -b/2a$, $y = -\Delta/4a$, în cazul de faţă avem $x = -1/m$, $y = (m-1)/m$. Eliminând parametrul m din aceste relaţii, găsim că $y = x + 1$ $(x \neq 0)$ este ecuaţia locului geometric căutat.

d) Fascicul de parabole.

Exemplu. Să se arate că parabolele asociate familiei de funcţii $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f_m(x) = mx^2 + x - m - 1$ cu $m \in \mathbf{R}^*$, trece prin două puncte fixe, altfel spus formează un fascicul cu două centre.

Soluţie: Punem condiţia ca ecuaţia $y = mx^2 + x - m - 1$ să fie satisfăcută de aceeaşi pereche de numere x şi y, oricare ar fi $m \in \mathbf{R}^*$. Grupând şi ordonând după puterile lui m, obţinem $m(1 - x^2) + y - x + 1 = 0, \forall m \in \mathbf{R}^2$. Rezultă sistemul $1 - x^2 = 0$, $y - x + 1 = 0$ care are soluţiile $x = 1$, $y = 0$ şi respectiv $x = -1$, $y = -2$. Cele două puncte fixe căutate sunt $A(-1, -2)$ şi $B(1, 0)$.

3. Poziţiile rădăcinilor ecuaţiei de gradul doi faţă de anumite numere date.

a) Ambele rădăcini ale ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ să fie mai mici decât un număr dat α. Bineînţeles, s-a admis că atât coeficienţii ecuaţiei cât şi numărul α sunt numere reale. Evident, se presupune că în coeficienţii ecuaţiei apare un parametru.

Facem substituţia $y = x - \alpha \Leftrightarrow x = y + \alpha$ şi observăm că problema este echivalentă cu impunerea condiţiilor ca ecuaţia obţinută în necunoscuta y să aibă ambele rădăcini negative.

Exemplu. Să se determine m astfel încât ambele rădăcini ale ecuaţiei $x^2 - mx + 2m = 0$ să fie mai mici decât 3.

Soluţie. Facem substituţia $x = y + 3$ şi obţinem ecuaţia $y^2 - (m-6)y + 9 - m = 0$. Pentru aceasta din urmă, impunem condiţiile $\Delta \geq 0$, $S < 0$ şi $P \gtrless 0$, notaţiile fiind cele uzuale. Găsim inegalităţile:

$$m^2 - 8m \geq 0, \quad m - 6 < 0, \quad 9 - m > 0$$

din care rezultă $m \in (-\infty, 0]$.

b) Ambele rădăcini să fie mai mari decât un număr dat β. Facem substituţia $y = x - \beta \Leftrightarrow x = y + \beta$ şi impunem condiţia ca ecuaţia în necunoscuta y să aibă amândouă rădăcinile pozitive.

c) O rădăcină mai mică decât α, cealaltă mai mare decât α. Cu alte cuvinte, $x_1 < \alpha < x_2$. Facem substituţia $y = x - \alpha \Leftrightarrow x = y + \alpha$ şi impunem condiţia ca ecuaţia în necunoscuta y să aibă o rădăcină pozitivă şi una negativă. Cu notaţiile obişnuite, aceste condiţii sunt $\Delta \geq 0$ şi $P < 0$.

Exemplu. Să se determine m, astfel încât rădăcinile ecuaţiei $mx^2 + (2m+1)x + m + 2 = 0$ să satisfacă condiţia $x_1 < 4 < x_2$.

Soluţie. Facem substituţia $y = x - 4$ şi obţinem ecuaţia $my^2 + (10m + 1)y + 25m + 6 = 0$. Impunându-i condiţiile $\Delta \geq 0$ şi $P < 0$, găsim $m \leq \frac{1}{4}$ şi $m \in (-\frac{6}{25}, 0)$. În concluzie, rezultă că $m \in (-\frac{6}{25}, 0)$ este condiţia pe care trebuie să o satisfacă parametrul m.

d) Rădăcinile ecuaţiei să satisfacă inegalităţile $x_1 < \alpha < x_2 < \beta$ în care α şi β sunt două numere date. Făcând substituţia $y = x - \alpha \Leftrightarrow x = y + \alpha$ şi impunând ecuaţiei obţinute în necunoscuta y condiţiile $\Delta \geq 0$, $P < 0$ găsim condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia dată să aibă o singură rădăcină $x_1 < \alpha$. Făcând apoi o altă substituţie $t = (x - \alpha)/(x - \beta)$ şi observând că $t < 0 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$, vom impune ecuaţiei obţinute în necunoscuta t aceleaşi condiţii $\Delta \geq 0, P < 0$ care ne vor da condiţia necesară şi suficientă ca ecuaţia iniţială să aibă o singură rădăcină $x_2 \in (\alpha, \beta)$. Din satisfacerea simultană a celor două condiţii găsite, obţinem restricţiile care trebuie impuse parametrului.

Exemplu. Să se determine m astfel încât rădăcinile ecuaţiei $x^2 - 9x + m = 0$ să satisfacă condiţiile $x_1 < 2 < x_2 < 4$.

Soluţie. Substituţia $y = x - 2 \Leftrightarrow x = y + 2$ ne conduce la ecuaţia $y^2 - 5y + m - 14 = 0$. Impunând $\Delta \geq 0$ şi $P < 0$, găsim o primă condiţie pentru m, şi anume $m < 14$. Punând $t = (x-2)/(x-4)$ se ajunge, după simplificări, la ecuaţia

$(m-20)t^2-2(m-19)t+m-14=0$, căreia i se impun condiţiile $\Delta' \geq 0, P' < 0$ în urma cărora găsim $14 < m < 20$. Cele două restricţii impuse parametrului fiind incompatibile, rezultă că nu există nici o valoare m care să îndeplinească condiţiile cerute în enunţ.

e) Ambele rădăcini x_1, x_2 să fie cuprinse în intervalul (α, β).
Facem substituţia $t=(x-\alpha)/(x-\beta)$ şi în baza echivalenţei $t<0 \Leftrightarrow \alpha < x < \beta$ vom impune ecuaţiei în noua necunoscută t condiţii ca ambele ei rădăcini să fie negative, adică $\Delta \geq 0$, $S<0$, $P>0$.

f) Rădăcinile ecuaţiei de gradul doi să satisfacă inegalităţile $x_1 < \alpha < \beta < x_2$. Făcând substituţia $x=y+\alpha$, vom cere ca ecuaţia obţinută să aibă o singură rădăcină negativă ($\Delta \geq 0$, $P<0$). Făcând substituţia $x=u+\beta$, vom cere ca ecuaţia obţinută în necunoscuta u să aibă o singură rădăcină pozitivă ($\Delta' \geq 0$, $P' < 0$). Evident, răspunsul la problema pusă este dat de îndeplinirea simultană a celor două condiţii impuse parametrului de care depind coeficienţii ecuaţiei iniţiale (în necunoscuta x).

Exemplu. Să se determine m, astfel încât rădăcinile ecuaţiei $x^2+(3m-1)x-m=0$ să satisfacă condiţiile $x_1 < 1$, $x_2 > 2$.

Soluţie. Făcând substituţia $x=y+1$, obţinem ecuaţia $y^2+(3m+1)\,y+2m=0$. Impunând $\Delta \geq 0$ şi $P<0$, găsim o primă condiţie pentru m, şi anume $m<0$. Făcând substituţia $x=u+2$,obţinem $u^2+3(m+1)u+5m+2=0$.Impunând $\Delta' \geq 0$ şi $P'<0$, găsim o a doua condiţie pentru m, şi anume $m<-2/5$.

g) Rădăcinile ecuaţiei de gradul doi să satisfacă condiţiile $x_1 \in (\alpha, \beta)$, $x_2 \in (\gamma, \delta)$
Evident, s-a admis că $\alpha < \beta < \gamma < \delta$. găsim o primă condiţie Făcând substituţia $t=(x-\alpha)/(y-\beta)$ vom impune condiţia ca pentru ecuaţia obţinută să avem $\Delta \geq 0$ şi $P<0$, ceea ce este echivalent cu faptul că ecuaţia iniţială are o singură rădăcină în intervalul (α, β). Astfel găsim o primă condiţie asupra paramerului m. Făcând substituţia $s=(x-\gamma)/(y-\delta)$ şi judecând asemănător, găsim o altă condiţie ce trebuie impusă paramerului m. Îndeplinirea simultană a celor două condiţii ne dă răspunsul la problema propusă.