UTILIZAREA DERIVATEI LA LOCALIZAREA RĂDĂCINILOR TRINOMULUI DE GRADUL AL DOILEA

Gheorghe IUREA *

În cele ce urmează vom rezolva câteva probleme legate de studiul pozițiilor rădăcinilor ecuației de gradul al doilea, față de numere reale date, cu ajutorul derivatelor, studiind variația unor funcții convenabil alese.

① *Determinați valorile lui* $m \in \mathbb{R}^*$ *dacă*

$$mx^2 + 2(m-1)|x| + m + 2 \geq 0 \tag{1.1}$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Notăm $|x| = t$ şi condiția dată devine

$$mt^2 + 2(m-1)t + m + 2 \geq 0,\ (\forall)\ t \in [0,\infty)$$

sau $m(t^2 + 2t + 1) - 2t + 2 \geq 0,\ (\forall)\ t \in [0,\infty)$ care este echivalentă cu

$$m - 2\frac{t-1}{(t+1)^2} \geq 0,\ (\forall)\ t \in [0,\infty). \tag{1.2}$$

Întrucât (1.1) $\Longleftrightarrow$ (1.2), considerăm funcția $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t) = m - 2\frac{t-1}{(t+1)^2} \tag{1.3}$$

având derivata

$$f'(t) = 2\frac{t-3}{(t+1)^3}$$

şi tabloul de variație

t	0		3			∞
$f'(t)$	$-\ -\ -\ -$		0	$+\ +\ +\ +$	$+\ +\ +\ +$	
$f(t)$	$m+2$	$\searrow$	$m-1/4$	$\nearrow$	$\nearrow$	m

Prin urmare $[f(t) \geq 0,\ (\forall)\ t \geq 0] \Rightarrow m - \frac{1}{4} \geq 0$, adică $m \in [\frac{1}{4},\infty)$. □

* *Profesor, Liceul "D.Cantemir", Iaşi*

② *Determinați valorile lui* $m \in \mathbb{R}$ *dacă*

$$f(x) = 2mx^2 - 4(m-1)x + 2m - 3 \tag{2.1}$$

are semn constant pe intervalul $(0,1)$.

Soluție. Întrucât (2.1) $\Rightarrow \lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = 1 > 0$ deducem că cerința problemei este echivalentă cu condiția

$$f(x) > 0, \ (\forall)\, x \in (0,1) \tag{2.2}$$

iar (2.2) $\iff 2m(x^2 - 2x + 1) + 4x - 3 > 0, \ (\forall)\, x \in (0,1)$ sau încă

$$m + \frac{4x-3}{(x-1)^2} > 0, \ (\forall)\, x \in (0,1). \tag{2.3}$$

Considerăm funcția $g : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = m + \frac{4x-3}{2(x-1)^2} \tag{2.4}$$

și deducem, din (2.3) & (2.4), că $f(x) > 0 \iff g(x) > 0$; derivata lui g este

$$g'(x) = \frac{1-2x}{(x-1)^3}$$

care implică tabloul de variație

x	0					$1/2$								1
$g'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$m-3/2$	$\searrow$				$m-2$		$\nearrow$			$\nearrow$			∞

Rezultă $[f(x) > 0, (\forall)\, x \in (0,1)] \Rightarrow m - 2 > 0$. Deci $m \in (2, \infty)$. □

---

③ *Determinați valorile lui* $m \in \mathbb{R}$ *pentru care mulțimea*

$$\{x \in \mathbb{R} : mx^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0\} \cap (-3, -1) \tag{3.1}$$

are un singur element.

Soluție. Condiția problemei este echivalentă cu faptul că

ecuația $mx^2 + (2m-1)x + m + 1 = 0$ *are o singură rădăcină în* $(-3,-1)$.

În intervalul $(-3,-1)$ această ecuație este echivalentă cu

$$m - \frac{x-1}{(x+1)^2} = 0. \tag{3.2}$$

Fie funcția $f:(-3,-1) \longrightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = m - \frac{x-1}{(x+1)^2}. \tag{3.3}$$

Întrucât $f'(x) = \dfrac{x-3}{(x+1)^3}$, șirul lui Rolle pentru f din (3.3) este

x	-3								-1
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	$m+1$								∞

de unde rezultă că ecuația $f(x) = 0$ are soluție unică în $(-3,-1)$ dacă $m+1<0$, deci

$$m \in (-\infty, -1).$$

□

④ *Considerăm ecuația*

$$x^2 - (m+2)x + 4 = 0, \ m \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Determinați m *știind că:*

a) *ecuația* (4.1) *are o singură soluție în intervalul* $(0,1)$;

b) *ecuația* (4.1) *are ambele soluții în intervalul* $(1,\infty)$.

Soluție. Pe intervalul $(0,\infty)$ ecuația (4.1) este echivalentă cu

$$\frac{x^2+4}{x} - m - 2 = 0. \tag{4.2}$$

Considerăm funcția

$$f:(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{x^2+4}{x} - m - 2$$

cu derivata $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$.

Șirul lui Rolle corespunzător acesteia este

x	0	1	2	∞
$f'(x)$			0	
$f(x)$	∞	$3-m$	$2-m$	∞
$m \in (-\infty, 2)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$m = 2$	$+$	$+$	0	$+$
$m \in (2, 3)$	$+$	$+$	$-$	$+$
$m = 3$	$+$	0	$-$	$+$
$m \in (3, \infty)$	$+$	$-$	$-$	$+$

Obţinem cu uşurinţă concluzia problemei :

a) $m \in (3, \infty)$; b) $m \in [2, 3)$.

□

⑤ *Determinaţi numărul elementelor mulţimii*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 4x^2 - mx - m + 5 = 0\} \cap [0, 1], \ m \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

Soluţie. Pe intervalul $[0, 1]$ ecuaţia

$$4x^2 - mx - m + 5 = 0$$

este echivalentă cu

$$\frac{4x^2 + 5}{x + 1} - m = 0. \tag{5.2}$$

Considerăm funcţia

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{4x^2 + 5}{x + 1} - m \tag{5.3}$$

cu derivata

$$f'(x) = \frac{4x^2 + 8x - 5}{(x + 1)^2} \tag{5.4}$$

având, în intervalul $[0, 1]$, unica rădăcină reală $x = \frac{1}{2}$.

Şirul lui Rolle corespunzător este

x	0	$1/2$	1
$f'(x)$		0	
$f(x)$	$5-m$	$4-m$	$9/2-m$
$m \in (-\infty, 4)$	$+$	$+$	$+$
$m = 4$	$+$	0	$+$
$m \in (4, 9/2)$	$+$	$-$	$+$
$m = 9/2$	$+$	$-$	0
$m \in (9/2, 5)$	$+$	$-$	$-$
$m = 5$	0	$-$	$-$
$m \in (5, \infty)$	$-$	$-$	$-$

Prin urmare mulţimea A are :

- 2 elemente dacă $m \in (4, 9/2)$;
- un element dacă $m \in \{4\} \cup (9/2, 5)$;
- nici un element dacă $m \in (-\infty, 4) \cup (5, \infty)$.

□