ASUPRA UNEI ECUAȚII DIOFANTICE CU APLICAȚII ÎN DETERMINAREA ELEMENTELOR UNEI MULȚIMI

Mihai GÂRTAN✦

În paginile *Gazetei Matematice* sau ale unor culegeri de probleme, cât şi la olimpiadele şcolare, apar frecvent probleme de tipul următor :

Să se determine elementele mulțimii

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} : \frac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{Z} \text{ cu } a, c, d \in \mathbb{Z}^{*},\ b \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{1}$$

Pentru a evita anumite cazuri banale, vom presupune că $ad - bc \neq 0$ (în caz contrar, numerele a şi b ar fi respectiv proporționale cu c şi d şi, ca urmare, fracția $(ax + b)/(cx + d)$ ar avea forma simplă $a_1 x + b_1$).

Pentru unele cazuri particulare relativ la numerele a, b, c, d se pot utiliza diverse artificii pentru a rezolva această problemă. Dacă – de exemplu – a, c şi d sunt prime între ele, rezolvarea în această manieră este mai dificilă.

Vom prezenta mai jos o metodă simplă de abordare a problemelor de acest fel în cazul general (adică în cazul când a, b, c, d sunt numere întregi arbitrare).

Problema enunțată revine la a rezolva în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ecuația

$$\frac{ax+b}{cx+d} = y, \tag{2}$$

unde $a, c, d \in \mathbb{Z}^{*}$, $b \in \mathbb{Z}$ şi am presupus că $c \nmid d$. Evident, în aceste condiții şi cu noi notații pentru coeficienți, (2) este echivalentă cu o ecuație diofantică de forma

$$axy + bx + cy = d, \tag{3}$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Z}^{*}$ şi $d \in \mathbb{Z}$. Înmulțind ecuația (3) cu a şi grupând convenabil, obținem ecuația

$$(ax + c)(ay + b) = ad + bc, \tag{4}$$

care are toți coeficienții în $\mathbb{Z}$. Se constată uşor că mulțimea soluțiilor în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale ecuației (4) coincide cu mulțimea soluțiilor în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ale sistemelor

✦ *Profesor, Lic. Internat "C.Negruzzi", Iaşi*

$$\begin{cases} ax + c = k \\ ay + b = p \end{cases} \tag{5}$$

cu $kp = ad + bc$ şi $k, p \in \mathbb{Z}$.

Observaţie. Dacă $c \mid d$, mulţimea de existenţă a ecuaţiei (2) este $\mathbb{Z} \setminus \{-d/c\}$ şi vom urma calea de mai sus considerând ecuaţiile (3), (4) şi sistemele (5) pe mulţimea

$$\left(\mathbb{Z} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right) \times \mathbb{Z}.$$

Exemplu. Fie $A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \dfrac{5x-7}{6x+3} \in \mathbb{Z}\right\}$.

Notând $y = \dfrac{5x-7}{6x+3}$ obţinem ecuaţia diofantică

$$6xy - 5x + 3y = -7 \iff (2x+1)(6y-5) = -19$$

şi următoarele sisteme :

$$\begin{cases} 2x + 1 = \pm 1 \\ 6y - 5 = \mp 19 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 2x + 1 = \pm 19 \\ 6y - 5 = \mp 1 \end{cases}.$$

Aceste patru sisteme conduc la soluţiile : $(-1, 4)$ şi $(-10, 1)$. Deci $A = \{-1, -10\}$.

□

Observaţie. Dacă în (1) se înlocuieşte $\mathbb{Z}$ cu $\mathbb{N}$ în unul sau în ambele locuri, se pot determina elementele noii mulţimi în acelaşi mod (cu modificări ecvidente pe parcurs). Astfel, apelând la calculele din exemplul precedent, avem

$$A = \left\{x \in \mathbb{N} : \frac{5x-7}{6x+3} \in \mathbb{Z}\right\} = \varnothing.$$

Exerciţii propuse. Determinaţi elementele mulţimilor :

1) $$A = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{4x-1}{3x+2} \in \mathbb{Z}\right\};$$

2) $$B = \left\{x \in \mathbb{N} : \frac{3x+2}{2x+1} \in \mathbb{N}\right\};$$

3) $$C = \left\{x \in \mathbb{Z} : \frac{2x-1}{3x-6} \in \mathbb{N}\right\}.$$