Conjectura lui Poincaré

Termenul *conjectură* înseamnă în matematică presupunere, ipoteză, în sensul unei afirmaţii nedemonstrate, care poate fi adevărată cu o probabilitate destul de mare (spre exemplu, este adevărată în mai multe cazuri particulare, ca în cazul inducţiei incomplete). **Conjectura lui Poincaré** se referă la caracterizarea sferei 3-dimensionale cu ajutorul unor proprietăţi topologice uşor de intuit şi a fost propusă de Poincaré în 1904. **Jules Henri Poincaré** (29 aprilie 1854 -17 iulie 1912) a fost unul dintre cei mai mari matematicieni francezi; a fost, în acelaşi timp, un mare fizician teoretic şi un filosof al ştiinţei. Poincaré este descris adesea ca *Ultimul matematician universal*, deoarece a excelat în toate domeniile matematice, cu adevărat importante, ce existau în perioada vieţii sale (relativ scurte). La moartea sa, a fost caracterizat ca *matematician, geometru, filosof şi om de litere; a fost un poet al infinitului, un fel de bard al ştiinţei.*

Până în momentul formulării conjecturii, existau suficiente informaţii şi rezultate legate de caracterizarea suprafeţelor (varietăţi 2-dimenionale) orientabile, mărginite şi închise din spaţiul euclidian 3-dimensioanal. Aceste suprafeţe pot fi caracterizate de *genul* lor. Acesta este un număr întreg nenegativ ($g \geq 0$) care poate fi descris intuitiv ca numărul de *găuri* ale suprafeţei. Spre exemplu, sfera uzuală, definită ca locul geometric binecunoscut în geometria euclidină clasică (sau ca frontiera bilei) are genul zero pentru că nu are nici o gaură. Torul, asimilat cu suprafaţa unui covrig are genul 1 pentru că are o gaură. Mai departe, se pot imagina covrigi cu mai multe găuri, iar suprafeţele lor ne furnizează suprafeţe de genuri mai mari. A rezultat destul de uşor că *două suprafeţe orientabile, închise şi mărginite (compacte) având acelaşi gen pot fi puse în corespondenţă biunivocă şi bicontinuă (sunt homeomorfe).* În particular, sfera apare ca singura suprafaţă orientabilă, compactă de gen zero.

Problema ce apare în mod natural, este dacă există caracterizări de acelaşi fel pentru sfera 3-dimenională, gândită ca frontiera unei bile 4-dimensionale. Poincaré a imaginat o operaţie intuitivă deosebit de fructuoasă pentru dezvoltarea ulterioară a *topologiei algebrice*, o disciplină matematică nouă, extrem de importantă în momentul actual. Este vorba despre *deformarea continuă* în interiorul unei anumite mulţimi, a unei curbe continue sau diferenţiabile din acea mulţime. O astfel de deformare poartă numele de *homotopie.* În particular, este important cazul când curba este simplă închisă şi deformarea se face către un punct al ei. Intuitiv, putem să ne imaginăm procesul realizat cu un lasou lansat de un paznic de vite. Când acest lasou nu prinde gâtul niciunei vite, el se strânge înapoi în mâna paznicului. Când lasoul prinde o vită (sau un ciot de copac), a întâlnit o singularitate (o gaură) şi paznicul este nevoit să deschidă lasoul (adică să renunţe la continuitate) ca să-l poată desprinde. Acum putem formula mai precis conţinutul *conjecturii lui Poincaré*:

Dacă o varietate M^3, netedă, compactă, de dimensiune 3, *are proprietatea că orice curbă simplă închisă situtată în această varietate poate fi deformată continuu la un punct, rezultă că M^3 este homeomorfă cu o sferă?*

Chiar Poincaré a notat oarecum prevăzător: *Mais cette question nous entraînerait trop loin.* Conjectura lui Poincaré a inspirat mulţi matematicieni şi tentativele de a o demonstra au condus la multe progrese în înţelegerea topologiei varietăţilor de dimensiune trei şi nu numai. O extindere naturală a acestei conjecturi a fost formulată chiar de Poincaré, care a afirmat, în mod eronat, că: *orice varietate poliedrală compactă, având omologia unei sfere n-dimensionale este homeomorfă cu sfera n-dimensională.* Noţiunea de *omologie* a fost abordată, la început, în contextul *topologiei combinatorii*, disciplină ce studiază complexele simpliciale sau, mai general, celulare, apoi, această noţiune a fost studiată în condiţii mai generale, obţinându-se invarianţi topologici interesanţi.

Pe la sfârşitul anilor '50 şi începutul anilor '60 s-au obţinut rezultate consistente în studiul conjecturii lui Poincaré, realizându-se că studiul varietăţilor de dimensiuni mai mari era mai uşor de făcut decât al celor de dimensiune 3. Conjectura lui Poincaré a fost demonstrată în cazul unei dimensiuni mai mari decât 4, în 1960, de către *S. Smale*. Alte contribuţii au fost aduse de către *J. Stallings*, *E. Zeeman* şi *A. Wallace*. 20 de ani mai târziu, *M. Freedman* a folosit cup-produsul şi invariantul Kirby Siebenmann, pentru a demonstra conjectura lui Poincaré în dimensiunea 4.

Pentru dimensiunea 3, toate tehnicile dezvoltate anterior nu au dat rezultate. In mod curios, la fel ca în problema găsirii structurilor diferenţiabile pe spaţiile euclidiene (unde s-au folosit aşa numitele teorii de etalonare (gauge), specifice fizicii) soluţia a venit din partea geometriei diferenţiale. In geometria diferenţială problematica este centrată pe studierea proprietăţilor diverselor structuri geometrice pe varietăţi şi mai puţin pe probleme de tipul conjecturii lui Poincaré. A fost *R. Hamilton* care a propus pentru studiu fluxul Ricci, pentru care a oferit şi unele interpretări fizice. El a reuşit să construiască, în 2003, o metrică de curbură constantă pe orice 3-varietate având curbura Ricci pozitivă.

Ceva mai târziu, *G. Perelman* de la Sankt Petersburg a oferit o soluţie a conjecturii lui Poincaré, în câteva articole postate pe Internet. Această soluţie a trezit intersul mai multor grupuri de cercetători care au început să aprofundeze detaliile tehnice ale demonstraţiilor propuse de Perelman.

Oricum, comunitatea matematică internaţională s-a arătat convinsă de argumentele lui G. Perelman şi, la Congresul Internaţional al Matematicienilor din august 2006 de la Madrid, lui G. Perelman i s-a oferit *medalia Fields* (un premiu asemănător cu premiul Nobel, care nu există pentru domeniul matematicilor). Trebuie spus că G. Perelman a refuzat, pentru prima dată în lumea matematicienilor, medalia Fields din diverse motive. În momentul actual, G. Perelman trece printr-o perioadă extrem de rea din viaţa sa, adoptând o atitudine de respingere a oricărei tentative de apropiere din partea confraţilor săi (o atitudine asemănătoare a adoptat şahistul american R. Fisher în anii '70, după obţinerea titlului de campion mondial). G. Perelman a refuzat şi un *premiu al Societăţii Europene de Matematică* (*EMS*) şi este pe cale să refuze şi *Premiul Mileniului.* S-a retras de la Institutul Steklov, unde lucra, şi trăieşte izolat, alături de mama sa.

Într-o ierarhie a celor mai importante descoperiri ştiinţifice din anul 2006, realizată de prestigioasa revistă Science, soluţia dată de G. Perelman s-a situat pe primul loc, devansând o altă descoperire ştiinţifică extrem de importantă din domeniul geneticii.

Prof. dr. Vasile OPROIU
Univ. "Al. I. Cuza", Iaşi