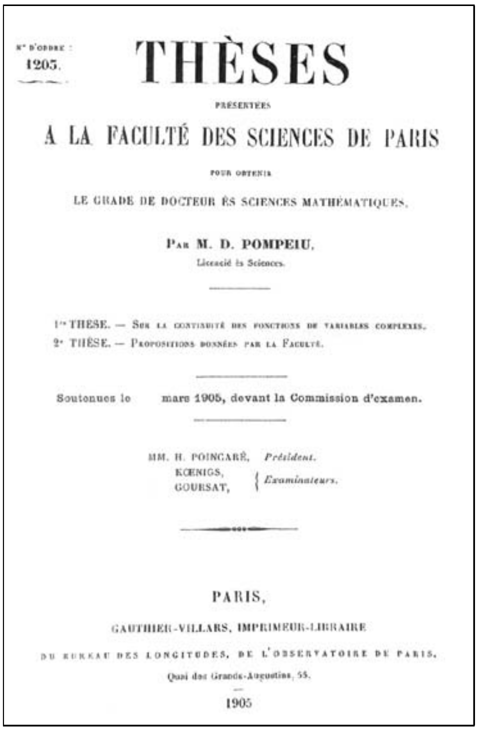
Un secol de la publicarea tezei de doctorat a lui Dimitrie Pompeiu

La data de 31 martie 1905, **Dimitrie Pompeiu** (1873 – 1954) susţinea la *Faculté des Sciences de Paris* teza sa de doctorat, *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, în faţa unei comisii de examinare prezidată de **H. Poincaré** şi având în componenţă pe **G. Koenigs** şi **E. Goursat**. Lucrarea a apărut în acelaşi an în Ann. Fac. Sci. de Toulouse, II-e série, 7 (1905), p. 264-315.

P. Montel, ilustru matematician francez cu strânse legături de prietenie cu mulţi matematicieni români, a apreciat valoarea de excepţie a tezei lui Pompeiu într-o succintă formulare: *Pour un coup d'essai, c'est un coup de maître* [**1**].

Idei, noţiuni şi rezultate prezente în teza lui Pompeiu au trezit interes şi au suscitat discuţii în rândul unor mari matematicieni ai timpului: **P. Painlevé**, **A. Denjoy**, **F. Hausdorff**, etc. Continuate de însuşi D. Pompeiu sau preluate şi îmbunătăţite cu noi idei de puternice şcoli matematice, acestea fac parte acum din patrimoniul matematicii universale.



N° D'ORDRE : 1205.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. D. POMPEIU,

Licencié ès Sciences.

1re THÈSE. — SUR LA CONTINUITÉ DES FONCTIONS DE VARIABLES COMPLEXES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le mars 1905, devant la Commission d'examen.

MM. H. POINCARÉ, *Président.*
KŒNIGS, GOURSAT, *Examinateurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

În Teza sa, abordând o problemă relativ la singularităţile funcţiilor analitice uniforme, problemă ce era subiect de căutări în acel moment, Pompeiu aduce clarificări surprinzătoare şi neconforme cu rezultatele considerate pe atunci a fi verosimile. Chestiunea fusese formulată de **P. Painlevé** [**13**] încă în 1897 şi exista părerea că o funcţie analitică uniformă nu poate fi continuă pe mulţimi discontinue de puncte singulare ale sale. Pompeiu arată, printr-un exemplu, că există funcţii de felul menţionat ce sunt continue pe mulţimea punctelor singulare şi având această mulţime de arie strict pozitivă. Suspiciunile asupra corectitudinii exemplului au fost înlăturate în 1909 de către **A. Denjoy**, ceea ce a dus la consacrarea lui D. Pompeiu. O prezentare documentată a acestui moment din istoria matematicii se găseşte în [**9**]. Matematicianul italian **T. Levi-Civita** îl considera pe D. Pompeiu ca fiind cel mai bun cunoscător, la începutul secolului trecut, al teoriei funcţiilor analitice uniforme [**1**].

Tot în Teză se găseşte punctul de plecare al unei alte realizări remarcabile a lui Pompeiu. În cercetările sale privind comportarea funcţiilor analitice uniforme în vecinătatea punctelor singulare, la pag. 45 din [**14**], Pompeiu se foloseşte de un exemplu datorat lui **A. Köpcke**. Cum construcţia acestuia era foarte complicată, Pompeiu dă în anul următor un exemplu simplu de acelaşi fel, adică de funcţie derivată mărginită care se anulează în orice interval şi nu este identic nulă în nici un interval [**16**]. Exemplul a fost inclus imediat în tratatele de teoria funcţiilor reale, funcţia construită fiind numită *funcţia lui Pompeiu* [**8**].

În rezolvarea problemelor abordate, amintite mai sus, Pompeiu utilizează cele mai noi concepte şi teorii existente la acea vreme (teoria mulţimilor şi topologia, integrala Lebesgue etc.). Mai mult, în acelaşi scop, Pompeiu introduce în Teză idei şi noţiuni noi care joacă un rol important în matematica de azi.

Amintim că *Topologia* s-a dezvoltat în legătură cu *Teoria funcţiilor de variabilă reală* şi s-a desprins de aceasta odată cu publicarea celebrei cărţi *Grundzüge der Mengenlehre* (1914) de către marele matematician german F. Hausdorff. Noţiunea de distanţă între două elemente (în sensul de metrică) apare în teza de doctorat a ilustrului matematician francez **M. Fréchet**, teză publicată în 1906 [**3**]. Spaţiile metrice vor căpăta o utilizare şi importanţă mare după 1920.

Acesta este contextul în care D. Pompeiu introduce în 1905 noţiunile de *"écart"* şi *"écart mutuel"* între două mulţimi ([**14**], secţiunea 21, pag. 17 şi 18), context care pune în evidenţă valoarea ideilor şi puterea de anticipaţie a matematicianului român. Păstrând notaţiile utilizate de Pompeiu, fie E_h şi E_k două mulţimi din plan închise şi mărginite (deci compacte); *distanţa mulţimii E_h în raport cu E_k ("écart de E_h par rapport à E_k")*, notată $\triangle_{hk}$, este definită ca maximul distanţelor unui punct mobil P_h (din E_h) la mulţimea E_k, iar suma $\triangle_{hk} + \triangle_{kh}$ este numită *distanţa reciprocă* (*"écart mutuel"*) între mulţimile E_h şi E_k. Această noţiune de distanţă îi permite lui Pompeiu ca, privind mulţimile de părţi din plan închise şi mărginite ca pe nişte mulţimi de elemente, să definească în mod firesc elementele-

21. Pour pouvoir raisonner avec précision, il faut adopter des définitions convenables.

Soit

(E) $$E_0,\quad E_1,\quad \ldots,\quad E_n,\quad \ldots$$

une suite d'ensembles fermés, certains de ces ensembles pouvant se réduire à des points isolés. Le système des ensembles E_n forme un ensemble total que je désigne par E.

Un quelconque des ensembles de la suite (E) sera dit un *élément*.

Deux éléments E_h et E_k seront dit *écartés* s'ils n'ont pas tous leurs points en commun. Un exemple simple de deux ensembles écartés nous est donné par deux droites qui se coupent.

La notion d'*écart* est susceptible d'une définition précise, dans le cas des ensembles bornés.

Soit P_h un point quelconque pris sur E_h; la distance du point P_h à l'ensemble E_k est une fonction continue de la position du point P_h. Cette fonction admet un maximum Δ_{hk}. Cest ce maximum que j'appellerai l'*écart* de l'ensemble E_h par rapport à E_k. Le nombre Δ_{hk} ne peut être nul que si tous les points de E_h font partie de E_k.

Prenons maintenant un point P_k dans l'ensemble E_k; la distance du point P_k à l'ensemble E_h est une fonction continue de la position du point P_k : elle admet un maximum Δ_{kh} et ce nombre ne peut être nul que si tous les points de E_k font partie de E_h. Δ_{kh} est l'écart de l'ensemble E_k par rapport à E_h.

La somme

$$\Delta_{hk} + \Delta_{kh}$$

peut être appelée *écart mutuel* des ensembles E_h et E_k.

Si l'écart mutuel des deux ensembles est nul, ces deux ensembles coïncident et réciproquement. Si $\Delta_{hk} = o$, E_h fait partie de E_k; si $A_{kh} = o$, E_k fait partie de E_h.

limită şi derivata acestor mulţimi de mulţimi, precum şi condiţia ca acestea să fie mulţimi închise. Pompeiu nu dezvoltă aceste idei, care ţin de *teoria hiperspaţiilor*, ci se limitează doar la aspectele care-i erau necesare transpunerii, în limitele posibilului, a unor raţionamente valabile pentru mulţimile de elemente la familii de curbe plane. Astăzi, mulţimea părţilor nevide, închise şi mărginite ale unui spaţiu metric X este notată cu $CLB\,(X)$, pentru proprietăţile şi aplicaţiile acestui spaţiu existând o vastă bibliografie.

Teza de doctorat a lui D. Pompeiu este "actul de naştere" a noţiunii de distanţă între mulţimi şi importanţa ei a fost imediat sesizată de către contemporani. Chiar în 1905, în recenzia făcută Tezei pentru *Jahrbuch fuer Mathematik,* 36 (1905), pag. 455, **A. Gutzmer** califică distanţa lui Pompeiu astfel: *"Einfuerung einesneuen Begriffes der Mengenlehre"* (un nou concept al teoriei mulţimilor).

În anul 1914, în *Grundzüge der Mengenlehre* [**5**], menţionată şi mai sus, F. Hausdorff preia ideea de distanţă a lui Pompeiu, o situează în cadrul natural al spaţiilor metrice şi consideră ca distanţă între două mulţimi maximul distanţelor lor relative în locul sumei acestora, aşa cum făcuse Pompeiu; în forma utilizată astăzi, dacă A şi B sunt două mulţimi nevide, închise şi mărginite ale unui spaţiu metric (X, d), distanţa lor este dată de

$$d\,(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} d\,(x, B)\,, \sup_{x\in B} d\,(x, A)\right\}.$$

Hausdorf dedică un paragraf consistent studiului proprietăţilor distanţei între mulţimi şi îl citează corect pe D. Pompeiu la pag. 463 [**5**] ca autor al acestei noţiuni. De asemenea, el observă că distanţele între mulţimi definite ca "sumă" sau ca "maximum" induc aceeaşi topologie, deci sunt echivalente. Hausdorff reia subiectul şi în 1927 în cartea *Mengenlehre* [**6**], unde Pompeiu este citat la pag. 280. De remarcat că, în acele timpuri, textul principal al unei cărţi nu cuprindea nici o referinţă la originea unui subiect, toate informaţiile în această privinţă fiind concentrate într-o extrem de succintă anexă, la sfârşitul cărţii. Din acest motiv, mulţi matematicieni au preluat noţiunea de distanţă între mulţimi direct din textul lui Hausdorff fără a sesiza referinţa din anexă, iar distanţa dintre mulţimi este adesea numită *distanţa Hausdorff.* În literatura ştiinţifică se folosesc şi denumirile: *distanţă Pompeiu*, *distanţă Hausdorff-Pompeiu*, sau *distanţă Hausdorff - Pompeiu.*

Marele matematician polonez **C. Kuratowski** în tratatul său *Topologie* [**7**], care a cunoscut mai multe ediţii, citează atât pe Pompeiu cât şi pe Hausdorff la pag. 106; menţiunea este făcută într-o notă de subsol, pe pagina unde este introdusă noţiunea, fiind astfel foarte accesibilă cititorilor.

În 1978, **B. L. McAllister** [**10**] publică un remarcabil studiu istoric al teoriei hiperspaţiilor pentru prima jumătate de secol a existenţei lor, 1900 – 1950. Aportul adus de D. Pompeiu în teza sa din 1905 este scos în evidenţă în cuvinte categorice: *"who [Pompeiu] may with some justice be said to have invented hyperspaces, and Hausdorff's use of them in 1914 in his treatrise* Grundzüge der Mengenlehre *had made them very well known"* (pag. 130) şi, de asemenea, în "I've found no evidence of the Hausdorff metric itself before Pompeiu's thesis" (pag. 311).

Există şi alte noţiuni de distanţă între mulţimi, neechivalente cu cea de mai sus; de exemplu, se poate defini distanţa între două mulţimi măsurabile Lebesgue,

$M, N \subset \mathbb{R}^n$, prin măsura Lebesgue a diferenţei lor simetrice $(M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ etc. Dar distanţa Hausdorff - Pompeiu este unica posedând o remarcabilă proprietate de compactitate: *dacă* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un şir de mulţimi compacte, mărginit în* $\mathbb{R}^n$*, atunci există o mulţime compactă* $A \subset \mathbb{R}^n$ *şi un subşir (indexat tot prin* n*) astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} d(A_n, A) = 0$. Această proprietate face din distanţa Hausdorff - Pompeiu o noţiune fundamentală în studiul topologiilor pe familii de submulţimi şi în teoria modernă a *optimizării geometrice* (*shape optimization*, *optimal design*). La *Conferinţa IFIP*, Torino, iulie 2005 (www.polito.it/ifip2005), secţiunea de optimizare a formelor este *dedicată aniversării a 100 de ani de la introducerea noţiunii de distanţă între mulţimi* de către Dimitrie Pompeiu. Cititorul interesat în astfel de studii poate consulta recenta monografie [**11**].

*

*   *

Întreaga operă matematică lăsată de D. Pompeiu se caracterizează printr-o profundă originalitate. D. Pompeiu a dat impulsul iniţial multor idei fecunde sau metode ingenioase pe care le-a dezvoltat, cel mai adesea, doar în partea lor de început şi a oferit cu generozitate altora posibilitatea de a continua cu propriile cercetări pe direcţiile deschise de el. Cei 100 de ani trecuţi de la susţinerea Tezei de către Pompeiu au dat mai multă strălucire ideilor cuprinse în ea. Multe alte concepte sau idei, oferite de Pompeiu ulterior, de-a lungul vieţii sale, au avut sau continuă să aibă o evoluţie spectaculoasă.

Amintim în treacăt de *derivata areolară* introdusă de Pompeiu în 1912, teoria căreia a fost dezvoltată în mare măsură de şcoala matematică românească (**M. Nicolescu**, **Gh. Călugăreanu**, **N. Ciorănescu**, **N. Teodorescu**, **Gr. Moisil** etc.), dar şi de matematicieni din alte ţări.

Probabil cea mai citată lucrare a lui Pompeiu este Nota [17] din anul 1929 (estimări recente indică în jur de o mie de articole publicate în diverse reviste internaţionale de specialitate şi dedicate problemei introduse în această Notă). Aici este enunţată faimoasa sa *conjectură*, nerezolvată complet până în prezent.

Fie f *o funcţie continuă în plan şi* $D \subset \mathbb{R}^2$ *o mulţime compactă astfel încât* $\iint\limits_{\sigma(D)} f(x,y)\,dx\,dy = 0$*, unde* $\sigma(D)$ *notează orice mulţime plană obţinută prin mişcări rigide ale lui* D*. Atunci, rezultă că* f *este nulă în plan?*

Pentru cazul când D este un disc, există contraexemple de tipul $f(x,y) = \sin(ax+by)$ cu $a, b \in \mathbb{R}$ convenabil alese [**4**], dar pentru alte domenii plane D răspunsul pare să fie pozitiv, deşi nu există demonstraţii decât în cazuri particulare [**19**]. Subliniem caracterul fundamental al proprietăţii de mai sus în analiza matematică (dacă ar fi demonstrată!) şi legătura cu *conjectura Schiffer*, ulterioară, referitoare la autovalorile operatorului Laplace cu condiţii Cauchy pe frontieră [**2**,**18**]. Toate aceste fapte demonstrează importanţa deosebită a acestei probleme a lui Pompeiu.

O. Onicescu, distins matematician şi savant român, elev al lui Pompeiu, în cartea *Pe drumurile vieţii* (1981) îşi omagiază maestrul în cuvinte de o nemărginită preţuire şi admiraţie:

"Un Brâncuşi al matematicii, ale cărui creaţii au fost simple, plastice, globale şi încărcate de semnificaţii în lumea formelor ştiinţei sale aşa cum erau ale sculptorului în lumea realizărilor lui."

Bibliografie

1. **G. Şt. Andonie** - *Istoria matematicii în România*, v. I, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1965, 342-365.
2. **C. A. Bernstein** - *An inverse spectral theorem and its relation to the Pompeiu problem*, Journal d' Analyse Mathématique, 37 (1980), 128-144.
3. **M. Fréchet** - *Sur quelques points du calcul fonctionnel (Thèse)*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22 (1906), 1-74.
4. **N. Garofalo, F. Segala** - *Univalent functions and the Pompeiu problem*, Trans. A.M.S., 346 (1), (1994), 137-146.
5. **F. Hausdorff** - *Grundzüge der Mengenlehre*, Viet, Leipzig, 1914.
6. **F. Hausdorff** - *Mengenlehre*, Walter de Gruyter, Berlin, 1927.
7. **C. Kuratowski** - *Topologie*, v. I, Warszawa, 1952.
8. **S. Marcus** - *Funcţiile lui Pompeiu*, Sudii şi Cercet. Mat., 5 (1954), 413-419.
9. **M. Mitrea, F. Şabac** - *Pompeiu's integral representation formula. History and mathematics*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 43 (1998), no. 1-2, 211-226.
10. **B. L. McAllister** - *Hyperspaces and Multifunctions, the First Half Century (1900-1950)*, Nieuw Arch. Wisk. (3), 26 (1978), 309-329.
11. **P. Neittaanmäki, J. Sprekels, D. Tiba** - *Optimization of elliptic systems. Theory and applications*, Springer Verlag, New York, 2005.
12. **O. Onicescu** - *Pe drumurile vieţii*, Ed. Şt. şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.
13. **P. Painlevé** - *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, professées à Stockholm*, Hermann, Paris, 1897.
14. **D. Pompeiu** - *Sur la continuité des fonctions de variables complexes (Thèse)*, Gauthier-Villars, Paris, 1905; Ann. Fac. Sci. de Toulouse, 7 (1905), II-e série, 264-315.
15. **D. Pompeiu** - *Opera matematică*, Ed. Acad. Române, Bucureşti, 1959.
16. **D. Pompeiu** - *Sur les fonctions dérivées*, Math. Ann., 63 (1907), 326-332.
17. **D. Pompeiu** - *Sur certains systemes d'équations linéaires et sur une propriété intégrale des fonctions de plusieurs variables*, C. R. Acad. Sc. Paris, 188 (1929), 1138-1139.
18. **M. Vogelius** - *An inverse problem for the equation $\triangle u = -cu - d$*, Annales de l' Institut Fourier, 44 (4) (1994), 1181-1209.
19. **S. A. Williams** - *A partial solution of the Pompeiu problem*, Math. Ann., 223 (1976), 183-190.

Prof. dr. Temistocle BÎRSAN (Iaşi)
Cercet. pr. dr. Dan TIBA (Bucureşti)