Trisecţia unghiului

Temistocle BÎRSAN[1]

Acest articol a fost scris la sugestia d-lui Acad. *RADU MIRON*, care a recomandat includerea în text a unui material relativ la trisecţia unghiului, material ce i-a fost adresat de către d-l ing. *Dumitru Panţuru* din Galaţi.

1. Geometria a apărut în antichitate din raţiuni practice. De la acumularea de cunoştinţe cu un evident caracter pragmatic (măsurarea terenurilor, capacităţilor, volumelor etc.), grecii antici se ridică la cercetarea bazată pe raţionamentul deductiv. Se atribuie în mod unanim *şcolii lui Pitagora* (sfârşitul sec. al VI-lea î. H. şi prima jumătate a sec. al V-lea î. H.) meritul de a fi dezvoltat şi pus la punct această metodă deductivă. Aşa-numitul *miracol grec* constă tocmai în acest fapt: introducerea demonstraţiei logice în susţinerea unui adevăr. În [2] se apreciază că noţiunea de demonstraţie la marii clasici greci: Euclid, Arhimede, Apollonius nu diferă de accepţiunea acesteia din zilele noastre.

Dreapta, cercul şi sfera erau considerate figuri perfecte, perfecţiune de esenţă divină. Poate că aşa se explică faptul că idealul grecilor antici era ca în efectuarea construcţiilor geometrice să fie utilizate numai două instrumente: *rigla* (negradată) şi *compasul*. Cu toate eforturile depuse, grecii antici şi multe generaţii de matematicieni ce au urmat nu au reuşit să stabilească dacă este posibilă / imposibilă rezolvarea doar cu rigla şi compasul a următoarelor probleme: *duplicarea cubului*, *trisecţia unghiului*, *cuadratura cercului*. S-a reuşit rezolvarea lor mult mai târziu şi, anume, în sens negativ: în 1837, *P. L. Wantzel* dovedeşte imposibilitatea duplicării cubului şi trisecţiei unghiului, iar în 1882 *F. Lindemann* dovedeşte imposibilitatea cuadraturii cercului (cu rigla şi compasul!).

Despre construcţiile cu rigla şi compasul şi, în particular, despre aceste trei probleme celebre ale antichităţii revista "RECREAŢII MATEMATICE" a publicat chiar în primul său număr un articol [5]. În prezenta notă atenţia este concentrată asupra trisecţiei unghiului.

2. Cu rigla (negradată) şi compasul se pot efectua următoarele *construcţii fundamentale*:

I trasarea dreptei determinate de două puncte date;

II construirea unui cerc de centru dat şi cu o rază având lungimea egală cu a unui segment dat;

III determinarea punctului de intersecţie a două drepte (dacă există);

IV determinarea punctelor de intersecţie a două cercuri (dacă există);

V determinarea punctelor de intersecţie a unei drepte cu un cerc (dacă există).

O problemă este *rezolvabilă cu rigla şi compasul* dacă poate fi redusă la un număr finit de construcţii fundamentale. *Trisecţia unghiului este problema împărţirii unui unghi dat în trei părţi egale cu ajutorul riglei şi compasului.*

[1] Prof. dr., Catedra de matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi", Iaşi

Să raportăm planul dat la un sistem cartezian de axe xOy. Numim *punct rațional* un punct cu ambele coordonate numere raționale. Numim *dreaptă rațională* o dreaptă reprezentată de o ecuație liniară cu coeficienți raționali. Evident, mulțimea punctelor și dreptelor raționale poate fi construită cu rigla și compasul. Sunt evidente și afirmațiile: 1° dacă $P(p_1, p_2)$ și $Q(q_1, q_2)$ sunt puncte raționale, atunci dreapta PQ determinată de ele este rațională; 2° dacă d_1 și d_2 sunt drepte raționale secante, atunci punctul lor de intersecție este rațional. Ca urmare, putem afirma: mulțimea tuturor punctelor și dreptelor raționale din plan este închisă la construcțiile cu rigla. Nu este închisă însă și la construcțiile cu compasul; de exemplu, punctele de intersecție ale cercului unitate cu prima bisectoare nu sunt raționale.

Fie $r_1 \in \mathbf{Q}$ astfel încât $r_1 > 0$ și $\sqrt{r_1} \notin \mathbf{Q}$. Să notăm cu $\mathbf{Q}_{r_1}$ extensia corpului $\mathbf{Q}$ prin ajuncția rădăcinii $\sqrt{r_1}$. Se știe că elementele lui $\mathbf{Q}_{r_1}$ sunt de forma $a + b\sqrt{r_1}$, $a, b \in \mathbf{Q}$. Avem

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}_{r_1} \subset \mathbf{R}.$$

Din punct de vedere geometric, extinderea lui $\mathbf{Q}$ la $\mathbf{Q}_{r_1}$ se face cu utilizarea compasului: $\sqrt{r_1}$ este, de exemplu, abscisă unuia din punctele de intersecție ale cercului de centru O și rază $\frac{1}{2}(r_1 + 1)$ cu dreapta $y = \frac{1}{2}(r_1 - 1)$ (după cum se verifică ușor rezolvând sistemul de ecuații: $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}(r_1 + 1)^2$, $y = \frac{1}{2}(r_1 - 1)$).

În același mod extindem $\mathbf{Q}_{r_1}$ la un corp $\mathbf{Q}_{r_2}$. În general, presupunând că $\mathbf{Q}_{r_{n-1}}$ a fost construit, luăm $r_n \in \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$ încât $r_n > 0$ și $\sqrt{r_n} \in \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$ și definim $\mathbf{Q}_{r_n}$ ca fiind corpul obținut prin adjuncția numărului $\sqrt{r_n}$ la $\mathbf{Q}_{r_{n-1}}$. Construim astfel șirul de corpuri:

$$\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}_{r_1} \subset \mathbf{Q}_{r_2} \subset \ldots \subset \mathbf{Q}_{r_n} \subset \ldots \subset \mathbf{R}, \tag{1}$$

unde, pentru orice n, elementele lui $\mathbf{Q}_{r_n}$ sunt de forma $a + b\sqrt{r_n}$, $a, b, r_n \in \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$, $r_n > 0$ și $\sqrt{r_n} \notin \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$.

Întrucât $\mathbf{Q}$ are o infinitate numărabilă de elemente, putem alege $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ astfel încât orice număr obținut, pornind de la elementele lui $\mathbf{Q}$, prin efectuarea de un număr finit de ori a operațiilor raționale (adunare, scădere, înmulțire și împărțire) și a operației de extragere a rădăcinii pătrate să aparțină la un anumit $\mathbf{Q}_{r_n}$. Altfel spus, dacă un număr real x se obține (ca abscisă sau ordonată) din puncte raționale prin construcții efectuate cu rigla și compasul, atunci există în șirul (1) un rang n încât $x \in \mathbf{Q}_{r_n}$, dar $x \notin \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$.

Să notăm $\widetilde{\mathbf{Q}} = \bigcup\limits_{n} \mathbf{Q}_n$ ($\mathbf{Q}_0 = \mathbf{Q}$). Se verifică independența lui $\widetilde{\mathbf{Q}}$ de alegerea șirului $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ și faptul că este un corp. În concluzie, are loc:

Teorema 1. *Mulțimea numerelor ce pot fi construite cu rigla și compasul plecând de la cele raționale este un subcorp al lui* $\mathbf{R}$.

3. Mai sunt necesare câteva rezultate elementare din teoria ecuațiilor algebrice. Fie ecuația cu coeficienți raționali

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \qquad a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{Q}. \tag{2}$$

Teorema 2. *Ecuația (2) admite o rădăcină ce poate fi construită cu rigla și compasul (pornind de la numerele raționale) dacă și numai dacă posedă o rădăcină rațională.*

Demonstraţie. Fie x_1 o rădăcină a ecuaţiei (2) ce poate fi construită cu rigla şi compasul. Din secţiunea precedentă, ştim că există un rang n astfel încât $x_1 \in \mathbf{Q}_{r_n}$ şi $x_1 \notin \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$. Putem presupune că printre rădăcinile ecuaţiei (2), ce pot fi construite cu rigla şi compasul, x_1 are cel mai mic n cu proprietăţile de mai sus. Rezultă că ecuaţia (2) nu are rădăcini în $\mathbf{Q}_{r_{n-1}}$. Dacă $n \geq 1$, atunci are loc scrierea: $x_1 = a + b\sqrt{r_{n-1}}$, $a, b \in \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$ şi $b \neq 0$. Faptul că $x_2 = a - b\sqrt{r_{n-1}}$ este de asemenea o rădăcină a ecuaţiei (2) are o demonstraţie standard. Conform relaţiilor lui Viète, avem: $x_1 + x_2 + x_3 = -a_1$. Deducem că $x_3 = -a_1 - (x_1 + x_2) = -a_1 - 2a$ şi, deci, pentru rădăcina x_3 avem: $x_3 \in \mathbf{Q}_{r_{n-1}}$, ceea ce contravine faptului că ecuaţia (2) nu are rădăcini în $\mathbf{Q}_{r_{n-1}}$. Rezultă că $n = 0$, adică $x_1 \in \mathbf{Q}$.

Partea a doua a teoremei este banală. Q.e.d.

Consecinţă. *Dacă o ecuaţie de gradul al treilea cu coeficienţi raţionali nu are rădăcini raţionale, atunci nu va avea nici rădăcini constructubile cu rigla şi compasul.*

Observaţie. Faptul că ecuaţia (2) admite sau nu rădăcini raţionale se stabileşte în mod elementar. Într-adevăr, prin schimbarea $t = dx$, unde d este un numitor comun al coeficienţilor a_1, a_2 şi a_3, se trece la ecuaţia cu coeficienţi întregi

$$t^3 + b_1 t^2 + b_2 t + b_3 = 0\,. \tag{3}$$

Se ştie că rădăcinile raţionale ale ecuaţiei (3) sunt în mod necesar întregi şi se găsesc printre divizorii lui b_3.

4. *Imposibilitatea trisecţiei unghiului cu rigla şi compasul.* Acest fapt a fost demonstrat în 1837 de către **Pierre-Laurent Wantzel** (1814 - 1848), la vârsta de 23 ani, în memoriul "*Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre par la règle et le compas*" publicat în "*Journal de mathématiques*" *de Liouville*, volumul al II-lea.

Să observăm că, fiind dat un unghi θ se poate construi cu rigla şi compasul şi numărul $\cos\theta$ şi invers (se subînţelege că este fixată o unitate de măsură pentru lungimea segmentelor).

Fie dat unghiul θ şi fie $a = \cos\theta$. Este cunoscută identitatea

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Luând $\alpha = \dfrac{\theta}{3}$ şi notând $t = 2\cos\dfrac{\theta}{3}$, se obţine ecuaţia de gradul al treilea

$$t^3 - 3t - 2a = 0. \tag{4}$$

Pentru $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, avem $a = \dfrac{1}{2}$ şi ecuaţia devine

$$t^3 - 3t - 1 = 0\,. \tag{5}$$

Această ecuaţie nu admite rădăcini raţionale, căci divizorii termenului liber sunt ± 1 şi nici unul nu este soluţie a ecuaţiei. Conform Teoremei 2, ecuaţia (5) nu are rădăcini care să poată fi construite cu rigla şi compasul. Ca urmare, nu poate fi făcută trisecţia unghiului $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ cu rigla şi compasul. În concluzie, *trisecţia unui unghi nu poate fi efectuată, în general, cu rigla şi compasul.*

Observaţie. Există şi valori ale lui θ pentru care trisecţia poate fi efectuată uşor cu rigla şi compasul; de exemplu, $\theta = \pi$ sau $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ sau $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$. Unghiurile care nu pot fi trisecţionate formează o mulţime de puterea continuului, iar cele ce pot fi trisecţionate o mulţime numărabilă [6].

Observaţie. Pregătirea teoretică din Secţiunea 3 permite să dovedim uşor şi *imposibilitatea duplicării cubului cu rigla şi compasul*, adică a construirii cu aceste instrumente a unui cub cu volum dublu faţă de un cub dat. Într-adevăr, dacă a este latura cubului dat şi x notează latura cubului cu volum dublu, suntem conduşi la ecuaţia

$$x^3 - 2a^3 = 0 \quad \text{sau} \quad t^3 - 2 = 0 \tag{6}$$

unde $x = at$. Faptul că divizorii lui 2 : ± 1 şi ± 2 nu sunt rădăcini ale ultimei ecuaţii demonstrează afirmaţia făcută.

5. Problema trisecţiei unghiului are o vechime de peste două milenii. Abordarea ei (cât şi a celorlalte probleme celebre ale antichităţii) cu mijloacele algebrei a fost posibilă mai târziu, după descoperirea metodei coordonatelor de către *R. Descartes* (1637) şi crearea geometriei analitice.

Am văzut că imposibilitatea trisecţiei unghiului şi duplicării cubului cu rigla şi compasul decurge din faptul că ecuaţiile (5) şi (6) sunt ireductibile în corpul numerelor raţionale. Aceasta concordă cu faptul că intersecţiile de drepte şi cercuri (singurele curbe ce pot fi trasate cu cele două instrumente clasice) sunt date de rădăcinile unor ecuaţii de gradul al doilea. Este de aşteptat ca problemele ce conduc la ecuaţii de gradul al treilea sau grad superior şi care sunt ireductibile în $\mathbf{Q}$ să nu fie rezolvabile cu rigla şi compasul.

Încă din antichitate, pentru rezolvarea problemei trisecţiei unghiului au fost utilizate diferite curbe şi au fost create instrumente ingenioase cu care acestea să fie trasate. Numeroşi mari matematicieni şi-au legat numele şi de această problemă.

Istoria matematicii menţionează pe *Hippias din Elis* (420 î.H.) ca fiind primul care s-a ocupat de trisecţia unghiului. A rezolvat această problemă utilizând o curbă numită mai târziu *cuadratrice* ([1], [6]). Această curbă face posibilă împărţirea unui unghi în oricâte părţi egale dorim.

O soluţie atribuită lui *Arhimede* utilizează *rigla cu etalon*, o riglă marcată cu două puncte, distanţa dintre care fiind luată ca unitate de măsură. Şi *spirala lui Arhimede* poate fi folosită pentru trisecţia unghiului.

Nicomede dă o rezolvare cu ajutorul unei curbe de gradul al patrulea numită *concoidă*.

R. Descartes a rezolvat trisecţia unghiului prin intersecţia unui cerc cu o parabolă în celebra sa "*Géométrie*" (1637).

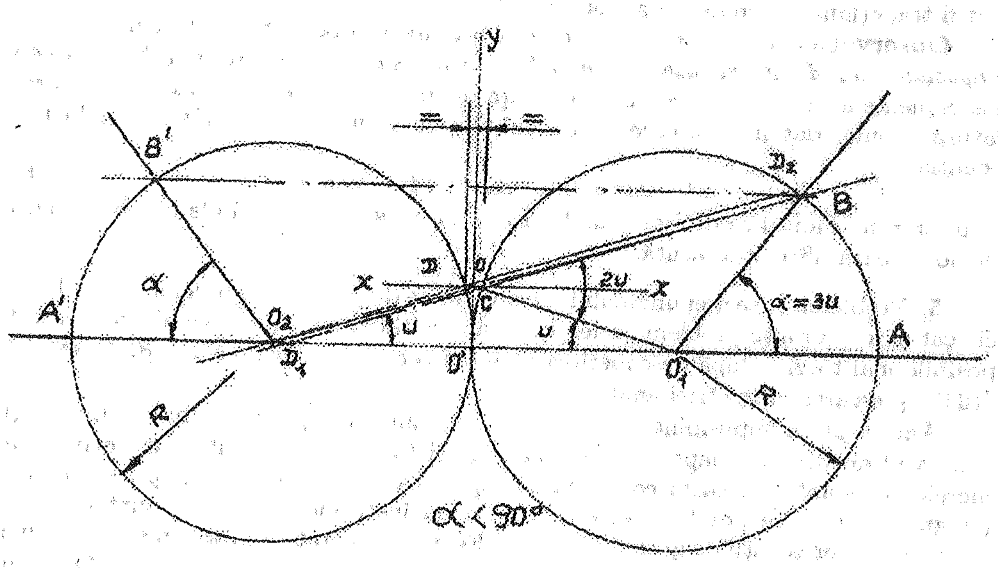
A. C. Clairaut şi *M. Chasles* dau soluţii utilizând hiperbola etc.

Alte curbe utilizate pentru a face trisecţia unui unghi: *melcul lui Pascal*, *cicloida lui Ceva*, *curba lui Schoute*, *curba lui Kempe* etc.

Să mai menţionăm că *J. Bolyai* a rezolvat problema trisecţiei unghiului apelând la hiperbolă.

Cititorul curios şi interesat poate găsi în [4], pag. 151, o soluţie a problemei trisecţiei unghiului cu ajutorul hiperbolei (deci cu utilizarea riglei, compasului şi a unui "compas" hiperbolic).

6. Iată şi "rezolvarea" dată de d-l ing. *D. Panţuru* problemei trisecţiei unghiului numai cu rigla şi compasul.



Această figură este însoţită de textul următor:

"Figura $O_2D_1BD_2$ este un paralelogram cu O_2B una din diagonale. Dreapta xx este paralelă cu O_1O_2 şi BB'. $O_2D = O_1C = R$. Deci şi $O_2D =\parallel D_1C = R$. Deci ΔD_1CO_1 este isoscel cu $\sphericalangle CD_1O' = \sphericalangle CO_1O' = u$, iar $\sphericalangle BCO_1 = \sphericalangle CD_1O' + \sphericalangle CO_1O' = 2u$. ΔCO_1B este isoscel, deci $\sphericalangle BCO_1 = \sphericalangle CBO_1 = 2u$, iar $\sphericalangle BO_1C = 180° - 4u$, $\sphericalangle BO_1A \equiv \alpha = 180° - [\sphericalangle BO_1C + \sphericalangle CO_1O'] = 180° - 180° + 4u - \alpha = 3u$. Deci $\alpha = 3u$ ($\alpha = \sphericalangle BO_1A$ dat)."

Toate construcţiile din figură se pot face cu rigla şi compasul, numai că ... patrulaterul $O_2D_1BD_2$ nu este paralelogram, aşa cum pretinde autorul.

O concluzie se desprinde: *a nu încerca rezolvarea acelor probleme despre care este cunscut că sunt imposibil de rezolvat!*

Bibliografie

[1] **Şt. Andonie** - *Varia Mathematica*, ed. a II-a, Ed. Albatros, Bucureşti, 1977.

[2] **N. Bourbaki** - *Éléments d'histoire des mathématiques*, Masson, 1984.

[3] **G. Ewald** - *Geometry: An introduction*, Wadsworth Publishing Company, Inc., Belmont, California, 1977.

[4] **A. Myller** - *Geometrie analitică*, ed. a III-a, Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1972.

[5] **Gh. Radu, I. Tofan** - *Construcţii cu rigla şi compasul*, Recreaţii Matematice, 1(1999), nr. 1, 34 - 36.

[6] **A. Tóth** - *Noţiuni de teoria construcţiilor geometrice*, Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1963.