Teorema celor patru culori

Silviana IONESEI [1]

Cum se face că matematica – produs prin excelență al gândirii umane, independent de experiență – poate fi atât de admirabil adaptată obiectelor lumii reale?

Albert Einstein

Este binecunoscut faptul că marile probleme ale matematicii, cum ar fi **Marea Teoremă a lui Fermat** sau **Conjectura lui Goldbach**, au contribuit enorm la dezvoltarea acestei ştiințe. Din eforturile matematicienilor (timp de zeci sau chiar sute de ani) de a găsi o rezolvare la întrebări în aparență simple s-au născut noi discipline în matematică, cu aplicații spectaculoase.

Problema celor patru culori are toate valențele unei probleme de mare "carieră": în primul rând formularea ei este extrem de simplă, nu presupune cunoştințe matematice; în al doilea rând, ea a rămas nerezolvată timp de peste un secol, fiind surprinzător de grea şi a suscitat preocuparea multor matematicieni de prestigiu.

Iată câteva repere istorice.

În 1852 un geograf din Edinburgh (istoria nu i-a reținut numele) l-a informat pe prietenul său, student în matematici, că foloseşte cel mult patru culori pentru o hartă împărțită în regiuni, fără ca două regiuni vecine să aibă aceeaşi culoare (precizăm că este vorba despre hărți plane, cu regiuni închise, iar "vecine" sunt regiunile cu o linie de frontieră comună; două regiuni care se întâlnesc într-un număr finit de puncte nu sunt considerate vecine).

Tânărului matematician, pe nume *Francis Guthrie*, i-au plăcut cele aflate şi a cerut informații mai ample, însă geograful l-a încredințat că acest procedeu e foarte răspândit şi aplicat pretutindeni din cauza economiei care-l prezintă. Răspunsul nu a fost mulțumitor pentru *Guthrie* ; el şi-a propus să demonstreze acest fapt dar nu a reuşit.

Fratele său, *Frederick*, studia chimia la Londra şi aflând de problema care-l preocupa pe *Francis* a cerut ajutorul profesorului *August De Morgan*, dar nici acesta nu a găsit o demonstrație satisfăcătoare.

În câțiva ani, problema a ajuns "la modă" printre matematicieni. Astfel, *A. Cayley* nefiind nici el capabil să demonstreze valabilitatea teoremei, a propus-o Societății Matematice din Londra.

Să trecem în revistă câteva din rezultatele parțiale ale demonstrării teoremei.

Faptul că trei culori nu sunt suficiente pentru colorarea oricărei hărți plane a fost repede constatat (vezi fig.1).

---

[1] Profesor, Colegiul Național "C. Negruzzi" , Iaşi

De Morgan a demonstrat că nu există hartă formată din 5 regiuni astfel încât să fie două câte două vecine, deci aceasta poate fi colorată cu patru culori.

A. B. Kempe, un avocat din Londra, membru al Societății Matematice din Londra şi deosebit de pasionat de matematică a publicat în 1879 un articol în care susținea că a demonstrat teorema. Raționamentul lui era deosebit de ingenios; el redusese problema la hărți normale, adică hărți în care nu există țări închise complet în alte țări şi nici puncte

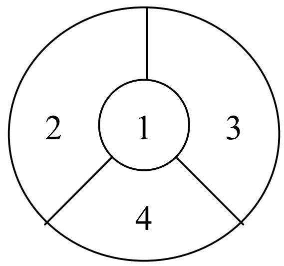

Fig.1

în care se întâlnesc mai mult de trei regiuni. Deşi raționamentul s-a dovedit incomplet, el conținea ideile de bază ce au condus la demonstrația corectă un secol mai târziu. Astfel, oricărei hărți i se poate asocia un graf în care fiecare regiune este reprezentată printr-un punct şi două puncte vor fi legate printr-o muchie dacă şi numai dacă punctele corespund la două regiuni vecine (vezi fig.2).

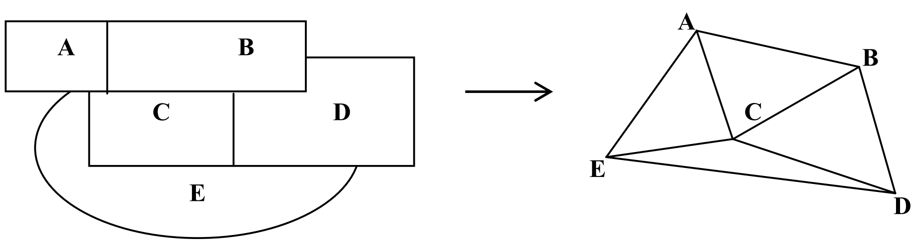

Fig.2

În acest mod problema colorării regiunilor de pe hartă revine la problema colorării punctelor din graful asociat astfel încât punctele legate printr-o muchie să fie colorate diferit.

Problema celor patru culori a contribuit la cercetari importante în teoria grafurilor, cum ar fi "numerele cromatice ale grafurilor".

Cu ajutorul unui graf special, matematicianul *P. J. Heawood* a arătat în 1890 că demonstrația lui Kempe are o eroare nu tocmai uşor de înlăturat.

Mai târziu, în 1913, matematicianul *Ph. Franklin* de la Massachusetts Institute of Technology ridică limita numărului de regiuni pentru care problema este rezolvată de la 5 la 21, iar în 1940 *Winn* reuşeşte să ajungă la 35 de regiuni.

Un alt rezultat deosebit de interesant se datorează lui *P. J. Heawood*, care şi-a consacrat 60 de ani din viaţă studierii problemei. Iată-l: probabilitatea de a găsi o hartă cu mai mult de 36 regiuni care să nu poată fi colorată cu patru culori este mai mică decât 10^{-10000} ! (de remarcat că 10^{10000} este un număr mai mare decât numărul atomilor din întreaga galaxie …).

O "teoremă a celor cinci culori" (faptul că cinci culori sunt eficiente pentru a colora o hartă) a fost obţinută relativ uşor; o demonstraţie elementară a acestui rezultat poate fi găsită în "*Despre numere şi figuri*" de *H. Rademacher* şi *O. Toeplitz*.

Pe la mijlocul sec. XX s-a conturat ideea de rezolvare a problemei prin mărirea numărului de regiuni pentru care patru culori sunt suficiente şi examinarea unor aşa-zise configuraţii inevitabile. Dacă ar fi fost posibil să se producă toate aceste configuraţii şi să se arate că ele pot fi colorate cu patru culori, atunci demonstraţia ar fi fost completă.

Cea mai eficientă metodă de producere a configuraţiilor s-a dovedit a fi un algoritm implementat pe calculator de *W. Haken* şi *K. Appel* , Universitatea Illinois, SUA , care au lucrat aproape 1200 ore şi, în fine, demonstraţia a fost încheiată [**1**].

Un an mai târziu, folosind o altă procedură de reducere a configuraţiilor inevitabile, *F. Allaise* de la Universitatea Waterloo, Ontario, CA, a reuşit să obţină demonstraţia teoremei în numai 50 de ore de dialog om-calculator.

Entuziasmul firesc stârnit în lumea matematicienilor de acestă reuşită neobişnuită până atunci a fost "temperat" de voci sceptice care susţineau că aceasta nu e o teorema de matematică în sensul clasic. Astfel, *T. Tymoczko* în articolul "*Problema celor patru culori şi semnificaţia ei filozofică*" (Journal of Philosophy, 1979) afirmă că teorema exprimă un adevăr a posteriori şi nu a priori, ca orice adevăr matematic. Argumentele sale se bazează în principal pe imposibilitatea de a verifica manual ("cu creionul") demonstraţia, dat fiind faptul că nu există un unic algoritm care să verifice toate programele posibile pe calculator.

În replică, *E. R. Swart* scrie în [**5**] că inconvenientul semnalat de preopinentul său este aparent, deoarece calculele foarte numeroase efectuate pe calculator erau de rutină, iar programul utilizat poate fi verificat. Sarcina calculatorului a fost copleşitoare prin dimensiuni, sarcină pe care omul ştia cum să o abordeze, dar n-ar fi putut-o termina niciodată.

A fost prima situaţie memorabilă în urma căreia lumea matematicienilor a trebuit să admită existenţa unor demonstraţii parţial accesibile omului, cât şi dreptul calculatorului de a ne sprijini în stabilirea adevărurilor matematice.

Bibliografie

1. K. Appel, W. Haken – *Every Planar Map Is Four Colorable* , Bulletin of the American Mathematical Society, 82(1976), 711-712.

2. F. Câmpan – *Probleme celebre*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1972.

3. Gh. Păun – *Din spectacolul matematicii*, Ed. Albatros, Bucureşti, 1983.

4. **L.A. Steen** – *Mathematicians Today*, Twelve Informal Essays, Springer–Verlag, 1978.

5. E.R Swart – *The Philosophical Implications of the Four-Color Problem*, The American Mathematical Monthly, 87(1980), 697-707.