Probleme din revista "RECREAŢII ŞTIINŢIFICE" (1883 - 1888)[1]

1 (**Problema 205, v. IV, p. 144**). O persoană depune la începutul fiecărui an suma v, în timp de n ani. După aceşti n ani vrea să retragă în fiecare an, în timp de $2n$ ani, o sumă a astfel ca în acest timp să-şi retragă tot capitalul . Care este valoarea lui a?

2 (**Problema 207, v. IV, p. 144**). A găsi legea de formaţie a numerelor a căror pătrate sunt terminate cu două cifre egale.

3 (**Problema 218, v. IV, p. 264**). Un număr este divizibil prin 4 când cifra unităţilor plus îndoitul cifrelor zecilor este un număr divizibil prin 4.

4 (**Problema 240, v. V, p. 48**). A împărţi 45 în patru părţi astfel ca: cea întâi adunată către un număr oarecare, din a doua parte scăzându-se acelaşi număr, a treia înmulţită prin acelaşi număr şi a patra împărţită prin acelaşi număr, să dea acelaşi rezultat.

5 (**Problema 275, v. VI, p. 24**). În o bucată de argint de 25,250 kg cu titlul 0,950 câtă aramă trebuie să turnăm pentru a avea un aliaj cu titlul 0,835?

6 (**Problema 277, v. VI, p. 24**). Doi călători pleacă în acelaşi moment din două locuri A şi B, unul spre altul. Întâlnindu-se şi calculând, găsesc că cel întâi a făcut 30 km mai mult decât al doilea şi că-i mai trebuie 4 zile pentru a ajunge în B, pe când celui de-al doilea îi mai trebuie 9 zile pentru a ajunge în A. Se întreabă care este distanţa între punctele din care au plecat?

7 (**Problema 279, v. VI, p. 48**). O persoană dă cu împrumut $\frac{4}{5}$ din averea sa cu 4% şi restul cu 5%; dobânda totală anuală este 2940 lei. Care-i este averea; cât a dat cu 4% şi cât cu 5%?

8 (**Problema 293, v. VI, p. 182**). Când o fracţie ordinară nereductibilă dă naştere la o fracţie zecimală periodică, perioada este divizibilă cu 9 dacă numitorul e prim cu 9.

9 (**Problema 189, v. IV, p. 48**). Să se găsească pentru p şi q nişte valori astfel ca rădăcinile ecuaţiei $x^2 + px + q = 0$ să fie egale cu p şi q.

10 (**Problema 200, v. IV, p. 96**). Să se determine a astfel ca 2 să fie minimul expresiei $\dfrac{x-a}{x^2-2x-3}$.

11 (**Problema 209, v. IV, p. 144**). Să se rezolve sistemul de ecuaţii

$$(x+2y)(x+2z) = a^2, \qquad (y+2x)(y+2z) = b^2, \qquad (z+2x)(z+2y) = c^2.$$

12 (**Problema 222, v. IV, p. 264**). Să se demonstreze că $(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$ este divizibil cu produsul $(a+b)(a+c)(b+c)$ când m este nepereche.

13 (**Problema 232, v. V, p. 24**). Să se afle valoarea minimă a expresiei $\sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{y^2+b^2}$ ştiind că $x + y = l$.

[1] Selectate de T. Bîrsan din volumele **IV**(1886), **V**(1887) şi **VI**(1888).

14 (Problema 188, v. IV, p. 48). În orice patrulater inscriptibil bisectoarele unghiurilor formate de laturile opuse sunt paralele cu bisectoarele unghiului format de diagonale.

15 (Problema 191, v. IV, p. 48). În orice triunghi dreptele ce unesc picioarele înălţimilor corespunzătoare la două laturi, picioarele bisectoarelor alăturate cu înălţimile şi picioarele perpendicularelor duse din centrul cercului înscris pe cele două laturi trec prin acelaşi punct.

16 (Problema 192, v. IV, p. 48). Printr-un punct O luat în planul unui triunghi ABC ducem o secantă care întâlneşte pe BC, CA şi AB respectiv în M, N, P. Luând simetricele M', N', P' în raport cu O, să se demonstreze că $M'A$, $N'B$, $P'C$ sunt trei drepte concurente.

17 (Problema 230, v. V, p. 24). Se dă o circumferinţă şi un punct exterior P. Se uneşte P cu centrul C al cercului. Se cere a se duce o coardă AB perpendiculară pe dreapta PC astfel ca triunghiul PAB să aibă o suprafaţă maximă.

18 (Problema 239, v. V, p. 48). Dacă în triunghiul ABC avem $B - C = \frac{\pi}{2}$, atunci avem $\frac{2}{a^2} = \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(b-c)^2}$.

19 (Problema 227, v. IV, p. 288). Să se taie o sferă prin un plan astfel ca diferenţa volumelor conurilor drepte ce au ca bază secţiunea planului cu sfera şi vârfurile pe sferă să fie maximă.

20 (Problema 271, v. V, p. 288). Pe un plan P se află aşezat un con circular drept şi o sferă. Înălţimea conului este egală cu diametrul sferei. Se duce un plan Q paralel cu planul P la distanţa x de acesta. Se cere ca volumul trunchiului de con să fie de n ori mai mare decât volumul segmentului sferic cuprins între plane. Discuţie.

21 (Problema 217, v. IV, p. 240). A verifica identitatea $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = \frac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x}$.

22 (Problema 285, v. VI, p. 96). Fie O, I, I' centrele cercului circumscris triunghiului ABC, cercului înscris şi cercului exînscris care atinge interior pe BC. A demonstra că $\mathrm{tg} IOI' = \pm \frac{2(\sin B - \sin C)}{2\cos A - 1}$.

23 (Problema 210, v. IV, p. 144). Vârful A al unui triunghi stă fix şi baza BC, de o lungime dată, lunecă pe o dreaptă fixă MN. Prin un punct P dat pe dreapta MN se duce o paralelă la AC, care paralelă întâlneşte pe AB într-un punct Q. Se cere locul geometric al punctului Q.

24 (Problema 241, v. V, p. 48). Vârful A al unghiului drept al unui triunghi dreptunghic ABC este fix, vârful B descrie o dreaptă şi ipotenuza este paralelă cu o dreaptă dată. A găsi locul vârfului C.

25 (Problema 284, v. VI, p. 72). Se dă un triunghi echilateral a cărui latură este a. Se înscrie un cerc în acest triunghi, apoi trei cercuri tangente la cel dintâi şi la laturile triunghiului, apoi trei cercuri tangente la câte unul din cele trei din urmă şi la laturile triunghiului şi aşa mai departe. A găsi limita sumei ariilor cercurilor înscrise.