DESPRE POSTULATUL V al lui EUCLID

Vasile OPROIU [1]

În şcoală se vorbeşte foarte mult despre postulatul V al lui Euclid, identificat cu axioma paralelelor. De fapt, foarte puţină lume ştie amănunte despre postulatele lui Euclid şi, în particular, formularea exactă şi semnificaţia celui de-al V-lea postulat. Autorul a văzut în primul număr al acestei reviste un articol despre construcţii cu rigla şi compasul, în care sunt formulate două din postulatele lui Euclid, şi a găsit că este interesant să informeze cititorii despre problematica generală a geometriei, aşa cum era văzută de matematicienii din antichitate.

Euclid, care a profesat prin anii 300 î.e.n. (aproximativ între 330 şi 275) la Biblioteca din Alexandria, edificată cu câteva zeci de ani înainte, a încercat să realizeze o sistematizare a matematicii cunoscute în vremea sa. Cu o intuiţie remarcabilă, a ştiut să depăşească unele dificultăţi inerente, legate de absenţa teoriei numărului real, teoria mulţimilor, punerea în evidenţă a elementelor primare într-o teorie axiomatică etc. şi a realizat construcţia geometriei care îi poartă numele în cartea sa intitulată *Elemente*. În carte se realizează o prezentare şi a altor ramuri ale matematicii, cunoscute în acea vreme, cum ar fi aritmetica, dar construcţia fundamentală rămâne, totuşi, cea a geometriei. Pentru aceasta, Euclid folosea *Definiţii*, *Axiome* şi *Postulate* şi demonstra *Teoreme*. Existau multe deficienţe logice, mai ales la începutul expunerii dar, în ansamblu, a rezultat o construcţie coerentă a unei teorii care a uimit şi incitat la alte investigaţii, nu numai pe contemporanii săi ci şi pe alţi matematicieni, până în zilele noastre. În multe şcoli din ţări cu o bună tradiţie în matematică se predă, încă, geometria după Elementele lui Euclid, iar cele mai cunoscute construcţii axiomatice, ale lui Hilbert şi Birkhoff, se bazează tot pe Elementele lui Euclid.

Elementele lui Euclid conţineau 13 cărţi. Cărţile **V, VII, VIII, IX** şi **X** sunt dedicate teoriei proporţiilor şi, în general, aritmeticii, în rest se discută despre geometrie. Cartea I începe cu 23 Definiţii pentru unele noţiuni folosite. Euclid simţea nevoia să explice semnificaţia unor elemente cu care lucra, deşi explicaţiile nu erau întotdeauna corecte, exprimând mai mult nişte percepţii intuitive despre acestea. Pentru exemplificare, prezentăm câteva definiţii : **(i)** *Punctul este ceea ce nu are părţi* ; **(ii)** *Linia este lungime fără lăţime* ; **(ii)** *Extremităţile unei linii sunt puncte* ; **(iv)** *Dreapta este linia situată la fel faţă de toate punctele sale* ; **(v)** *O suprafaţă este ceea ce are lungime şi lăţime* ; **(vi)** *Extremităţile unei suprafeţe sunt linii* ; **(vii)** *Un plan este o suprafaţă situată la fel faţă de toate dreptele sale* ; **(viii)** *Un unghi (plan) este înclinarea reciprocă a două linii ce se intersectează în plan*. Se poate comenta mult despre deficienţele logice, legate de absenţa genului proxim şi a diferenţei specifice sau explicarea unor noţiuni cu ajutorul altor nedefinite, dar se cuvine să remarcăm că, spre sfârşit, definiţiile devin tot mai precise şi, oricum, Euclid nu le-a folosit în mod esenţial în demonstraţiile teoremelor sale.

---

[1] *Prof.dr., Facultatea de Matematică, Univ. "Al.I.Cuza" Iaşi*

Postulatele erau afirmaţii acceptate fără demonstraţie (deci axiome !) şi se refereau, în mod specific, la proprietăţi geometrice. Lista Postulatelor lui Euclid este :

I. *Pentru oricare două puncte există o dreaptă care le uneşte.*
II. *Orice dreaptă poate fi prelungită indefinit.*
III. *Pentru orice punct dat şi orice segment dat, se poate construi un cerc cu centrul în punctul dat şi având raza egală cu lungimea segmentului dat.*
IV. *Toate unghiurile drepte sunt egale.*
V. *Dacă o dreaptă coplanară cu alte două drepte le intersectează şi formează cu acestea unghiuri interne, de aceeaşi parte, cu suma mai mică decât două unghiuri drepte, atunci cele două drepte se intersectează în acea parte a secantei în care suma celor două unghiuri este mai mică decât două unghiuri drepte.*

Axiomele aveau un caracter mai general şi se refereau la toată construcţia din cele 13 cărţi ale lui Euclid.

1^0 *Cantităţi egale cu o a treia sunt egale între ele.*
2^0 *Dacă la cantităţi egale se adaugă cantităţi egale, se obţin cantităţi egale.*
3^0 *Dacă din cantităţi egale se scad cantităţi egale, se obţin cantităţi egale.*
4^0 *Dacă la cantităţi inegale se adaugă cantităţi egale, se obţin cantităţi inegale.*
5^0 *Cantităţile obţinute prin dublarea unor cantităţi egale sunt egale.*
6^0 *Cantităţile obţinute prin înjumătăţirea unor cantităţi egale sunt egale.*
7^0 *Cantităţile (figurile) care se suprapun sunt egale.*
8^0 *Întregul este mai mare decât partea.*
9^0 *Două drepte nu pot să închidă întreg spaţiul.*

Nu este cazul să comentăm conţinutul fiecărui axiome şi al fiecărui postulat. Referindu-ne la postulatul V, putem să remarcăm că enunţul său este mai complicat decât enunţurile celorlalte postulate şi, timp de peste 2000 de ani, a existat bănuiala că ar putea fi demostrat pe baza celorlalte postulate şi axiome. Putem menţiona încercările lui Saccheri, Lambert, Legendre, Gauss ş.a. Răspunsul negativ a venit prin construirea unei geometrii neeuclidiene de către Lobacevski şi Bolyai. Să observăm că există numeroase afirmaţii echivalente cu postulatul V al lui Euclid. Dintre acestea menţionăm : *Printr-un punct nesituat pe o dreaptă se poate duce cel mult o paralelă la acea dreaptă ; Două drepte paralele tăiate de o secantă formează cu aceasta unghiuri alterne interne egale ; Suma unghiurilor într-un triunghi este două unghiuri drepte; Două drepte paralele cu o a treia sunt paralele între ele ; Toate triunghiurile au aceeaşi sumă a unghiurilor lor ; Prin orice punct interior unui unghi se poate duce o dreaptă care să intersecteze laturile unghiului ; Există triunghiuri asemenea dar neegale ; Punctele dintr-un semiplan situate la o distanţă dată de o dreaptă dată formează o dreaptă ; Pentru oricare trei puncte necoliniare există cercul circumscris ; Linia mijlocie într-un triunghi este egală cu jumătatea bazei ; În orice triunghi dreptunghic este valabilă teorema lui Pitagora.*

Unul din urmaşii lui Euclid a fost Arhimede, care s-a străduit să îmbogăţească concepţia lui Euclid în ceea ce priveşte teoria măsurii în geometria euclidiană. În timp ce Euclid se mulţumea să stabilească rapoarte între lungimi de porţiuni de linii, arii de figuri plane, volume de corpuri, Arhimede a oferit metode de calcul ale valorilor numerice ale acestor măsuri. Arhimede a introdus alte 5 postulate, cel mai cunoscut fiind tot al V-lea, cunoscut sub numele de *Axioma lui Arhimede* în teoria numărului real. Cele cinci postulate ale lui Arhimede sunt :

A.I *Dreapta (segmentul) are lungimea cea mai scurtă dintre liniile cu două capete fixate.*

A.II *Dacă se consideră două linii convexe cu aceleaşi capete, atunci cea mai lungă dintre cele două linii este cea care o înconjoară pe cealaltă.*

A.III *Planul (porţiunea de plan) are aria cea mai mică în familia suprafeţelor care au un perimetru fixat.*

A.IV *Dacă se consideră două suprafeţe convexe cu acelaşi perimetru, atunci cea care o înconjoară pe cealaltă are aria cea mai mare.*

A.V *Dacă se consideră două lungimi, sau arii, sau volume inegale, atunci cea mai mare dintre cantităţi este mai mică decât cea obţinută luând pe cea mai mică de un număr convenabil de ori.*

Este pe deplin acceptat că, prin rezultatele lui Euclid şi Arhimede, grecii antici au cam rezolvat problemele esenţiale ale geometriei euclidiene şi au ştiut să folosească aceste rezultate în numeroase aspecte ale vieţii lor: cercetare astronomică, practicarea unor meserii, agricultură, războaie etc.. Sistematizarea în ce priveşte logica sistemului axiomatic al geometriei euclidiene, realizată de Hilbert cu circa 100 de ani în urmă a pus lucrurile la punct în ce priveşte principiile, dar aspectele metodice rămân încă deschise, în sensul că predarea la nivel de şcoală elementară, liceu sau universitate a unor aspecte tratate de Euclid şi Arhimede mai poate fi îmbunătăţită.

Tot legat de postulatul V, menţionăm posibilitatea existenţei geometriei hiperbolice, pusă în evidenţă de către Lobacevski şi Bolyai şi care se modelează în contextul suprafeţelor de curbură constantă, negativă. Această geometrie rezultă simplu, prin negarea axiomei paralelelor, în sensul că printr-un punct nesituat pe o dreaptă se pot duce mai multe paralele la acea dreaptă. Mai există o posibilitate de a nega această axiomă, după ce avem grijă să înlocuim relaţia de "a fi între" şi axiomele de ordine (grupa a II-a) cu noţiunea de "perechi de puncte care se separă" pe o dreaptă şi cu alte axiome specifice geometriei proiective (în acest context, dreptele nu mai sunt deschise, cum suntem obişnuiţi, ci devin curbe închise, de tipul cercurilor). După ce se face acest lucru, negarea axiomei paralelelor se poate realiza în sensul că printr-un punct nesituat pe o dreaptă nu se poate duce nici o paralelă la acea dreaptă. Aceasta este geometria eliptică, care se modelează pe suprafeţele de curbură constantă pozitivă.

Bibliografie

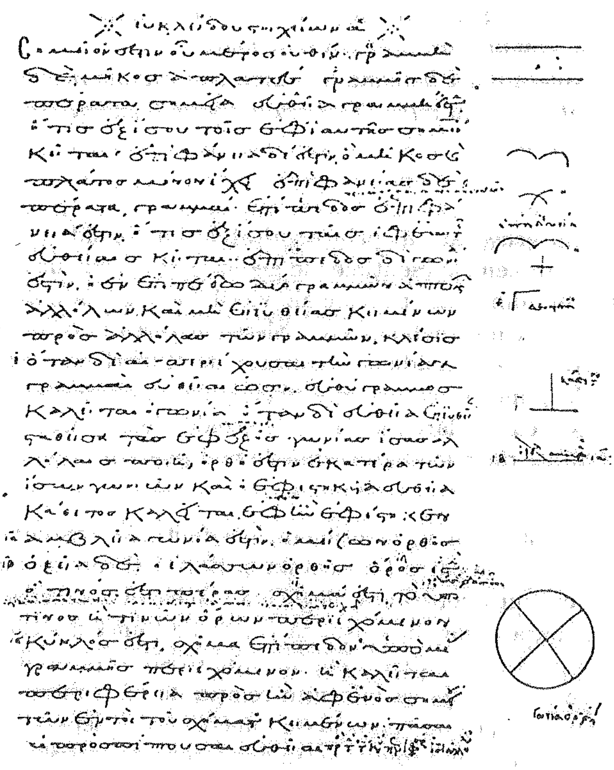
[1] **Euclid**, *Elemente*, vol **I**, (cărţile **I** - **VI** de *Geometrie plană*), traducere de Victor Marian, Bucureşti, 1939.

[2] **Vaisman, I.** *Fundamentele matematicii*, Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1968, 222 pp.

[3] **Efimov, N.** *Geométrie supérieure*, Editions Mir, Moscou, 1981, 605 pp.

[4] **Hadamard, J.** *Lecţii de geometrie elementară*, Ed. Tehnică, Bucureşti, *Geometrie plană*, 1962, 512 pp., *Geometrie în spaţiu*, 1961, 539 pp.

[5] **Albu, A. C.** **ş.a.** *Geometrie pentru perfecţionarea profesorilor*, Ed. Did. Ped. Bucureşti, 1983, 215 pp.



Prima pagină din Elementele lui Euclid.
(Manuscrisul grec Nr. 2344 dela Biblioteca Naţională din Paris).