CONSTRUCŢII CU RIGLA ŞI COMPASUL

Gheorghe RADU[+] *& Ioan TOFAN*[*]

Sistemul axiomatic al GEOMETRIEI EUCLIDIENE conţine şi următoarele postulate :

(P_1) : *Date orice două puncte distincte, există o unică dreaptă ce trece prin punctele respective.*

(P_2) : *Date un punct şi un segment, se poate construi un cerc având punctul dat drept centru, iar raza egală cu lungimea segmentului dat.*

Se poate afirma că aceste două postulate reprezintă suportul construcţiilor realizabile cu rigla şi compasul. Interesul pestru astfel de probleme, în lumea antică, poate fi apreciat drept major. Se reuşise rezolvarea unor probleme precum : (i) *determinarea mijlocului unui segment* ; (ii) *construirea bisectoarei unui unghi* ; (iii) *construirea unghiurilor de* 60° *şi* 90° ; (iv) *transferul unui unghi dat* ; (v) *construirea de segmente de lungime* $\alpha\beta$, α/β, $\sqrt{\alpha}$ *cu* α & β *segmente de lungimi date* ; (vi) *construirea poligoanelor regulate cu* 3 , 4 , 5 , 6 , 8 , 10 *laturi* ; etc.

Nu s-a reuşit rezolvarea (în sens afirmativ sau negativ a) unor probleme precum : *construirea poligoanelor regulate cu* 7 *şi* 9 *laturi şi* – mai ales –

① *trisecţionarea unghiurilor* (în general) ;

② *construirea unui cub de volum dublu faţă de cel al unui cub dat* ;

③ *construirea unui pătrat de arie egală cu aria unui disc circular* (***cuadratura cercului***).

Originile problemei trisecţionării unghiurilor sunt oarecum obscure. Se presupune că ea a apărut în contextul construirii poligoanelor regulate. Prima referire la cea de a doua problemă apare într-o scrisoare trimisă de ERATOSTENE regelui Ptolemeu al III-lea în anul 240 î.H., legătura ei cu oracolul din Delphi fiind bine cunoscută. Informaţii relative la cea de a treia problemă se găsesc în papirusurile descoperite de A.H. RHIND (scribul Ahmes transcriindu-le în anul 1650 î.H., după lucrări mai vechi). Se afirmă aici că latura pătratului este $\frac{8}{9}d$ unde d este diametrul cercului. Comparând $(\frac{8}{9}d)^2$ cu πr^2 $(d = 2r)$ se obţine $\pi = 3{,}1604\ldots$ Nu sunt date însă şi explicaţii cum s-a ajuns

[+] *Prof.dr. şi* [*] *Conf.dr. la Catedra de Algebră Fac. Matematică - Univ. "Al.I.Cuza" - Iaşi*

la rezultatul $\frac{8}{9}d$.

Rezolvarea a fost dată în anul 1837 de către L. WANTZEL (primele două probleme) şi – în 1882 – de către F. LINDEMANN (ultima problemă). În vederea prezentării metodelor de rezolvare sunt necesare următoarele precizări :

Probleme prezentate anterior se circumscriu, în esenţă, necesităţii construirii – pornind de la un segment de lungime γ, unde γ este un număr real pozitiv – a unui alt segment de lungime α ; vom spune, în acest context, că numărul real α este *construibil* dacă, pornind de la un segment $P_0 P_1$ de lungime egală cu o unitate, se poate construi un segment de lungime α într-un număr finit de "paşi", utilizând rigla negradată şi compasul. Prin "pas" – în secvenţa menţionată – se înţelege oricare din construcţiile standard :

- ☐ *trasarea dreptei determinate de două puncte date* ;
- ☐ *construirea unui cerc de centru dat şi având raza de lungime egală cu lungimea unui segment dat* ;
- ☐ *găsirea punctelor de intersecţie dintre două drepte sau două cercuri, sau dintre un cerc şi o dreaptă* (dacă există).

Aceşti "paşi" se aplică punctelor P_0 şi P_1 sau altor punte deja determinate în "paşii" anteriori.

Reformulând, obţinem că problema constructibilităţii cu rigla şi compasul revine la a da o mulţime M de puncte din plan (M având cel puţin două elemente) şi – pornind de la această mulţime – la a construi mulţimea M a punctelor ce se obţin prin următoarele operaţii : intersecţia de drepte ce unesc puncte ale lui M ; intersecţia de cercuri având centrele în puncte din M şi raze egale cu distanţe între puncte din M ; intersecţia unei drepte ce uneşte puncte din M cu un cerc determinat (ca şi în cazul anterior) de puncte din M ; de asemenea, reluarea, în secvenţă finită, a operaţiilor anterioare pentru mulţimile de puncte deduse succesiv prin aplicarea unor astfel de operaţii. Din punct de vedere practic se are în vedere faptul că operaţiile anterioare permit determinarea mijlocului unui segment, mediatoarei unui segment, bisectoarei unui unghi, paralelei printr-un punct la o dreaptă, perpendicularei dintr-un punct pe o dreaptă etc.

În acest context se impune găsirea condiţiilor necesare şi suficiente în care un punct al planului aparţine mulţimii M . În cazul în care considerăm că planul dat este raportat
la un sistem cartesian de coordonate (xOy) putem opera cu numere complexe. Atunci M va fi mulţimea numerelor complexe ce se obţin, plecând de la o mulţime de numere complexe M, prin aplicarea în număr finit de "paşi", a operaţiilor cu numere complexe

ce "acoperă" operațiile geometrice descrise anterior.

Remarcăm că și noțiunea de *număr construibil* poate fi redefinită prin condiția ca numărul respectiv să fie abscisă sau ordonată a unui punct construibil atunci când mulțimea inițială este $M = \{O(0.0), A(1,0)\}$.

Problemele enunțate anterior revin la constructibilitatea lui $\sqrt[3]{2}$ (în problema dublării cubului) sau, de exemplu, la constructibilitatea lui $\cos 20°$ (în cazul trisecționării unui unghi de $60°$).

Rezultatele cunoscute, în problema constructibilității cu rigla și compasul, afirmă că :

1° mulțimea numerelor reale construibile este subcorp al corpului numerelor reale $\mathbb{R}$;

2° numărul real γ este construibil dacă și numai dacă există numerele reale pozitive $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ așa încât $\gamma_1 \in \mathbb{Q}$, $\gamma_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{\gamma_1}) = F_1, \ldots, \gamma_n \in F_{n-1}(\sqrt{\gamma_{n-1}})$ unde $\mathbb{Q}$ desemnează corpul numerelor raționale iar $F(\sqrt{\alpha})$ reprezintă "cel mai mic" subcorp, relativ la incluziune, al lui $\mathbb{R}$ ce include F și conține $\sqrt{\alpha}$;

3° dacă γ este construibil, atunci există un polinom în $\mathbb{Q}[X]$ ce admite rădăcina γ, iar polinomul de grad minim cu această proprietate are gradul de forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$ (reciproca nu este adevărată).

Drept consecință se obține rezultatul că *dublarea cubului, trisecția unghiurilor* și (ținând cont că π nu este rădăcină pentru nici un polinom din $\mathbb{Q}[X]$ sau, alftel spus, este transcendent peste $\mathbb{Q}$), *cuadratura cercului* ***sunt imposibile*** (folosind doar rigla și compasul).

În mod similar se arată că problema împărțirii unui unghi oarecare în n părți egale este imposibilă dacă n nu este de forma 2^k, $k \in \mathbb{N}$.

În ceea ce privește construcția *poligoanelor regulate*, se cunoaște că un poligon regulat este construibil dacă numărul laturilor sale este de forma $2^k p_1 p_2 \ldots p_m$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sunt numere prime distincte, de forma $2^{2^k} + 1$ (rezultat stabilit de GAUSS).

BIBLIOGRAFIE

1. BOLD, B. : *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them.* Dover, New York, 1969.
2. DÖRRIE, H. : *100 Great Problems of Elementary Mathematics.* Dover. New York, 1965.
3. SPINDLER, K. : *Abstract Algebra with Applications.* M. Dekker, Rotterdam, 1992.