DESPRE MAREA TEOREMĂ A LUI FERMAT

Adrian CORDUNEANU *

Această teoremă, numită uneori şi "ultima teoremă" a lui Fermat, a fost şi rămâne încă unul din subiectele cele mai discutate, care a contrariat (şi a incitat) multe minţi luminate, vreme de peste 350 de ani.

Totul a început cu o însemnare a lui FERMAT din anul 1637, pe marginea unei pagini din *Aritmetica* lui DIOFANT :

"Am descoperit o demonstraţie cu adevărat minunată, dar nu am aici destul spaţiu spre a o scrie."

Problema pe care şi-a pus-o Fermat a fost rezolvarea în mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$ a ecuaţiei $x^n + y^n = z^n$, în care $n > 2$ este un număr natural fixat. Cazurile $n = 1$ şi $n = 2$ nu intră în discuţie, deoarece este evident că atunci ecuaţia are o infinitate de soluţii, adică există o infinitate de triplete (x, y, z) din $\mathbb{N}^*$ care verifică această ecuaţie. De exemplu, în cazul $n = 2$ ecuaţia devine $x^2 + y^2 = z^2$ şi are ca soluţii (particulare) tripletele $(x = 3k,\ y = 4k,\ z = 5k)$ în care $k \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar ; dar există şi alte numeroase soluţii, dacă ne amintim de Teorema lui Pitagora.

Marea teoremă a lui FERMAT s-ar putea formula astfel :

TEOREMĂ. *Ecuaţia*

$$\boxed{x^n + y^n = z^n} \tag{1}$$

nu are soluţii în $\mathbb{N}^*$, *dacă* $n > 2$.

Fermat a dat demonstraţia numai în cazul $n = 4$. Demonstraţia în cazul general, despre care vorbeşte FERMAT, a rămas necunoscută. Astăzi, se consideră că ea era greşită sau – în cel mai bun caz – incompletă. Mult mai târziu, EULER a adaptat metoda lui FERMAT, reuşind să găsească o demonstraţie pentru cazul $n = 3$. Se poate vedea însă că afirmaţia din enunţul teoremei este adevărată şi pentru toate numerele naturale, multipli ai lui 3 sau 4. În adevăr, dacă ecuaţia

$$x^{3m} + y^{3m} = z^{3m}, \tag{2}$$

* *Prof.dr. la Catedra de Matematică, Univ. Tehnică "Gh. Asachi" - Iaşi*

în care $m \in \mathbb{N}^*$ este fixat, ar avea o soluție cu x, y, z întregi pozitivi, punând $a = x^m$, $b = y^m$, $c = z^m$ ar rezulta $a^3 + b^3 = c^3$, adică am găsi o soluție pentru ecuația lui Fermat cu $n = 3$, în care numerele a, b, c să fie întregi pozitivi, ceea ce este imposibil. La fel se judecă şi în cazul când $n = 4m$, adică n este multiplu de 4. Mai mult chiar, ținând seama de descompunerea unui număr natural în factori primi, se poate vedea că ar fi suficient să arătăm că ecuația (1) nu are soluții în $\mathbb{N}^*$ *numai în cazul* p = *număr prim* > 2, pentru ca teorema să fie complet demonstrată. Pentru a justifica această afirmație, vom observa că oricare ar fi numărul natural $n > 2$, există numai două posibilități şi anume :

(i) n nu are alți factori primi în afară de 2, şi

(ii) n are cel puțin un factor prim $p > 2$.

În ipoteza (i) avem $n = 2^{2m}$ sau $n = 2^{2m+1}$ cu $m \geq 1$, adică n este multiplu de 4 şi ştim că atunci ecuația (1) nu are soluții cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. În ipoteza (ii) avem $n = pm$ cu $p > 2$ factor prim şi $m \geq 1$ număr natural. Dacă ecuația $x^p + y^p = z^p$ nu are soluții cu x, y, z întregi pozitivi, repetând raționamentul din cazul ecuației (2), deducem că aceeaşi proprietate o are şi ecuația (1).

* * * *

Cu timpul, s-au construit clase destul de largi de numere naturale n , pentru care ecuația (1) nu are soluții cu (x, y, z) cu elemente din $\mathbb{N}^*$. Către mijlocul secolului XIX, un progres important în această direcție a fost obținut de KUMMER, care a şi fost premiat de Academia Franceză pentru aceste studii. Dar, poate ar fi interesant de aflat şi ce a spus GAUSS, ca răspuns la scrisoarea pe care i-a trimis-o astronomul H.OLBERS :

> *Îți sunt foarte îndatorat pentru ştirile privitoare la premiul parizian. Dar îți mărturisesc că Marea Teoremă a lui Fermat, ca afirmație izolată, mă interesează foarte puțin. Căci aş putea emite o mulțime de astfel de aserțiuni, pe care nimeni nu le-ar putea demonstra ca adevărate sau false.*

Cu toate eforturile făcute, demonstrația celebrei teoreme, adică imposibilitatea rezolvării în mulțimea întregilor pozitivi a ecuației (1), fără a impune vreo altă restricție numărului natural $n > 2$, întârzia să apară.

În anul 1908, medicul german Paul WOLFSKELL a instituit un premiu pentru cel care ar fi reuşit să demonstreze buclucaşa teoremă, care a dat atâta bătaie de cap matematicienilor. În iulie 1993, matematicianul englez Andrew WILES a anunțat că a găsit o demonstrație, dar aceasta avea o fisură, pe care a reuşit să o înlăture în 1997, câştigând *premiul Wolfskell*, în valoare de 50.000 \$.

De un mare ajutor în găsirea demonstrației au fost cercetările a doi matematicieni japonezi, anume Y. TANIYAMA şi G. SHIMURA, de numele cărora se leagă aşa numita

" *conjectură Taniyama - Shimura* ", de la care s-a plecat în abordarea cazului general (n = număr natural > 2). Din nefericire, demonstrația este destul de complicată şi presupune cunoştințe din mai multe ramuri ale matematicii. Putem spune că demonstrația propriu-zisă este cunoscută doar de un număr mic de oameni şi – probabil – va mai trece ceva timp până ce va deveni accesibilă în învățământul superior.

Cartea lui S. SINGH [1] descrie etapele cercetărilor lui Andrew WILES şi modul în care s-a ajuns la rezolvarea finală, fără a intra în detalii de specialitate şi fără a prezenta demonstrațiile ca atare. Ea conține şi destule chestiuni de istoria matematicii, care însă nu au totdeauna o legătură prea strânsă cu subiectul propus. La sfârşit, ea conține o foarte interesantă bibliografie, intitulată "sugestii pentru lecturi suplimentare", majoritatea titlurilor fiind în limba engleză.

Recent, un bancher texan şi matematician amator, Andrew BEAL, a promis un nou premiu celui care va reuşi să demonstreze că :

> *Ecuația* $x^p + y^q = z^r$ *în care* p, q, r *sunt numere întregi pozitive date, mai mari decât 2, nu are nici o soluție cu* x, y, z *întregi pozitivi, care să nu aibă un factor comun.*

Condiția ca x, y, z să nu aibă factori comuni, adică c.m.m.d.c. al lor să fie egal cu 1, se impune în mod natural, dacă ne gândim la egalitatea $2^3 + 2^3 = 2^4$, care ne spune că în cazul $p = q = 3$, $r = 4$ ecuația $x^3 + y^3 = z^4$ admite soluția $x = y = z = 2$. În cazul $p = q = r > 2$, ecuația lui BEAL se reduce la ecuația lui FERMAT $x^p + y^p = z^p$, deci putem spune că ea este o generalizare efectivă a acesteia din urmă.

Premiul instituit de BEAL are valoarea de 50.000 \$ şi va fi acordat acelui care va arăta că problema pusă de el – cunoscută sub numele de ***Conjectura BEAL*** – *nu are soluție* sau va găsi *un exemplu care să demonstreze falsitatea ei.*

Dacă, în decurs de zece ani, premiul nu va fi acordat, valoarea sa va creşte anual cu suma de 5000 \$, până când va fi câştigat de cineva. Alte informații despre acest subiect pot fi găsite în [2].

BIBLIOGRAFIE

1. SINGH, Simon. : *Marea Teoremă a lui Fermat*. Editura Humanitas, Bucureşti, 1998 (294 pag.)
2. ∗ ∗ ∗ Beal's Conjecture. *The New Zealand Mathematics Magazine*, **35** (1998), No.2, p.38.