Autour de la comatrice

Adrien REISNER[1]

Abstract. We prove in this article that any matrix $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ such $rg(A) \in \{0, 1, n\}$ is a *(classical) adjoint* of a matrix B.

Keywords: matrix, diagonal matrix, rank of a matrix, characteristic polynomial, (classical) adjoint matrix.

MSC2010: 15B36.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ on note ${}^tA$ la matrice transposée et pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $com(A)$ désigne la *comatrice* de A, i.e. la matrice formée avec les cofacteurs de la matrice A.

On rappelle que pour tout matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a l'égalité suivante:

$$A^t com(A) = {}^t com(A) A = det(A) I_n. \tag{1}$$

Les résultats suivants concernant le rang de la comatrice sont bien connus:
(i) $rg(com(A)) = n$ si $rg(A) = n$,
(ii) $rg(com(A)) = 1$ si $rg(A) = n - 1$,
(iii) $rg(com(A)) = 0$ si $rg(A) \leq n - 2$.

On se propose ici de démontrer qu'inversement on a l'implication:

$$rg(A) \in \{0, 1, n\} \quad \Rightarrow \quad A \in M_n(C) \ \textit{est une comatrice}. \tag{2}$$

i.e., si $com(A)$ désigne la comatrice de la matrice A, l'équation $com(X) = A$ admet une solution - unique - si et seulement si $rg(A) \in \{0, 1, n\}$.

Remarque. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il existe une matrice X telle que $com(X) = A$ soit vérifiée. En effet, on a immédiatement:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = com(\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}).$$

Pour le cas général on a besoin du lemme suivant:

Lemme. *Pour toute matrice $A \in M_n(C)$, la matrice $\tilde{A} = {}^t com(A)$ est un polynôme en A. Ce polynôme est*

$$R(X) = \frac{det(A) - \chi_A(X)}{X}.$$

[1]TELECOM ParisTech; *adrien.reisner@yahoo.fr*

Démonstration. Soit $\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a:

$$\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0I_n = O.$$

Supposons d'abord la matrice A inversible. Alors, $\tilde{A} = det(A)A^{-1}$. Mais

$$A(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + ... + a_2A + a_1I_n) = -a_0I_n = -det(A)I_n,$$

d'où :

$$\tilde{A} = det(A)A^{-1} = -(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + ... + a_2A + a_1I_n) \in \mathbb{C}[A].$$

Traitons maintenant le cas où la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est quelconque. Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{C})$ étant un ouvert *dense* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles qui converge vers A. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, écrivons:

$$\chi_M(X) = X^n + a_{n-1}(M)X^{n-1} + ... + a_1(M)X + a_0(M).$$

Les a_i apparaissent comme des fonctions polynomiales des coefficients de M. En particulier ce sont des fonctions continues et par conséquent on obtient: $\lim\limits_{p\to+\infty} a_i(A_p) = a_i(A)$. Compte tenu de la première partie de la démonstration, on a pour tout p:

$$\tilde{A_p} = -(A_p^{n-1} + a_{n-1}(A_p)A_p^{n-2} + ... + a_2(A_p)A_p + a_1(A_p)I_n),$$

ce qui permet de conclure, en faisant tendre p vers l'infini:

$$\tilde{A} = -(A^{n-1} + a_{n-1}(A)A^{n-2} + ... + a_2(A)A + a_1(A)I_n) \in \mathbb{C}[A].$$

Revenant à (2), distinguons alors les seuls cas possibles:

Cas 1. Cas d'une *matrice nulle ou inversible.*
Le cas où $rg(A) = 0$, i.e. $A = O$ est trivial, puisque $com(O) = O$. Supposons désormais que $rg(A) = n$. Dans ce cas, l'unicité de l'inverse d'une matrice et (1) montre que l'équation $com(X) = A$ admet *une solution unique.*

Théorème 1. *Lorsque la matrice A est inversible, il existe $z \in C$ tel que*

$$A = com(zcom(A)).$$

Démonstration. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On a alors:

$$(det(A))^n = det(det(A)I_n) = det({}^tAcom(A)) =$$

$$= det({}^tA)\,det(com(A)) = det(A)det(com(A))$$

et par suite, puisque $det(A) \neq 0$: $det(com(A)) = (det(A))^{n-1}$.

On se propose de montrer que:

$$(3) \qquad A = (det(A))^{-n+2} com(com(A)).$$

En effet, appliquons (1) à $com(A)$:

$$^t com(A) com(com(A)) = det(com(A)) I_n = (det(A))^{n-1} I_n.$$

Or : $^t com(A) A = det(A) I_n$. Il vient alors :

$$^t com(A) com(com(A)) = {}^t com(A) \times ((det(A))^{n-2} A).$$

De plus, $^t com(A)$ est inversible puisque A l'est et on trouve après simplification par $^t com(A)$:

$$(4) \qquad A = (det(A))^{-(n-2)} com(com(A)).$$

Les cofacteurs étant - au signe près - les déterminants d'ordre $n-1$, on a pour tout complexe z:

$$(5) \qquad com(zA) = z^{n-1} com(A).$$

Fixons alors $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^{n-1} = 1/(det(A))^{n-2}$. Il vient, compte tenu de (4), $A = z^{n-1} com(com(A))$, soit finalement avec l'égalité précédente:

$$A = com(z com(A)) \quad où \quad z^{n-1} = \frac{1}{(det A))^{n-2}},$$

i.e. l'équation $com(X) = A$ admet $X = z com(A)$ pour *solution unique.*

Cas 2. Cas d'une matrice *diagonalisable de rang* 1.

Théorème 2. *Lorsque la matrice A est diagonalisable de rang 1 il existe $\beta \in C$ et une matrice C dépendant de $^t A$ tel que:*

$$A = com(\beta C).$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $rg(A) = 1$. Il existe deux matrices colonnes $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A = U {}^t V$; en particulier l'image de A est la droite vectorielle $\mathbb{C}U$. Il vient alors:

$$tr(A) = tr(U {}^t V) = tr({}^t V U) = {}^t V U,$$

ce dernier terme étant un scalaire. Par conséquent,

$$A^2 = (U {}^t V)(U {}^t V) = U \times tr(A) \times^t V = tr(A)(U {}^t V) = tr(A) A.$$

On en déduit l'équivalence suivante:

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow tr(A) \neq 0.$$

Le polynôme $Q(X) = X(X - tr(A)I_n)$ est *un polynôme annulateur de* A. Si $tr(A) \neq 0$, alors A annule un polynôme scindé à racines simples est donc A est diagonalisable. Inversement, si A est diagonalisable, alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ et D diagonale *non nulle* - puisque $rg(D) = rg(A) = 1$ - telle que $D = P^{-1}AP$. Donc $tr(A) = tr(D) \neq 0$, c.q.f.d.

Supposons désormais que la matrice A est diagonalisable. Dans ce cas, on a : $tr(A) \neq 0$ et alors $B = (1/tr(A))A$ est un *projecteur* de rang 1. On en déduit que $C = I_n - {}^tB$ est un projecteur de rang $n-1$ ayant pour polynôme caractéristique : $\chi_C(X) = (-1)^n X(X-1)^{n-1}$. Or - voir le lemme -, le polynôme $R(X) = \frac{det(C) - \chi_C(X)}{X}$ est tel que ${}^tcom(C) = R(C)$ soit $R(X) = (1-X)^{n-1}$ et, par suite,

$$ {}^tcom(C) = (I_n - C)^{n-1} \text{ soit } com(C) = (I_n - {}^tC)^{n-1}. $$

Or, $I_n - {}^tC$ est également un projecteur, d'où:

$$ com(C) = (I_n - {}^tC)^{n-1} = (I_n - {}^tC) = B = \frac{1}{tr(A)}A. $$

Finalement, si β est tel que $\beta^{n-1} = tr(A)$, on a avec (5):

$$ A = com(\beta C) \text{ où } \beta^{n-1} = tr(A), $$

i.e. l'équation $com(X) = A$ admet $X = \beta C$ pour solution.

Cas 3. Cas d'une matrice *non diagonalisable de rang* 1.

Théorème 3. *Lorsque la matrice A n'est pas diagonalisable et de rang 1 il existe une matrice D de rang $n-2$ tel que:*

$$ A = com({}^tD). $$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $rg(A) = 1$ *non diagonalisable*, donc - voir démonstration ci-dessus : $tr(A) = 0$ et $A^2 = tr(A)A = O$. Soit $e_n \notin KerA$ et $e_1 = Ae_n \neq 0$; donc $Ae_1 = A^2e_n = 0$, i.e. $e_1 \in KerA$. On complète (e_1) en une base $(e_1, e_2.......e_{n-1})$ de $KerA$. L'endomorphisme A canoniquement associé à la matrice A admet pour matrice dans la base $(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ la matrice $B = (b_{i,j})$ avec $b_{1,n} = 1$, $b_{i,j} = 0$ si $(i,j) \neq (1,n)$. Les matrices A et B sont alors semblables, i.e. $\exists M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $B = M^{-1}AM$.

Soit $C = (c_{i,j})$ où $c_{1,n} = -1$, $c_{i,i} = 1$ pour $2 \leq i \leq n-1$ et $c_{i,j} = 0$ sinon. On a immédiatement:

$$ C^2 - C = B, \quad CB = BC = Oetrg(C) = n-1. $$

Avec les notations précédentes, la matrice $D = MCM^{-1}$ vérifie alors:

$$ rg(D) = rg(C) = n-1, \quad D^2 = MC^2M^{-1} = A + D. $$

De plus,

$$ AD = (MBM^{-1})(MCM^{-1}) = M(BC)M^{-1} = O $$

et de même $DA = O$. La matrice $I_n - D = M(I_n - C)M^{-1}$ et, par suite:

$$rg(I_n - D) = rg(I_n - C) = 2.$$

Cette matrice D vérifie aussi:

$$D^3 = D^2 D = (A + D)D = AD + D^2 = D^2,$$

d'où $D^m = D^2$ pour tout $m \geq 2$. Le polynôme caractéristique de la matrice D est : $\chi_D(X) = \chi_C(X) = X^2(1 - X)^{n-2}$. Soit alors $S(X)$ le polynôme suivant : $S(X) = \frac{det(D) - \chi_D(X)}{X} = -X(1 - X)^{n-2}$. Comme précédemment, on a : ${}^t com(D) = S(D)$ soit $com(D) = S({}^t D)$ ou

$$com(D) = -\,{}^t D(I_n - {}^t D)^{n-2} = -\,{}^t D + \sum_{k=1}^{n-2} (-1)^{k+1} \binom{n-2}{k} ({}^t D)^{k+1},$$

soit, puisque $D^m = D^2$ pour tout $m \geq 2$:

$$com(D) = -\,{}^t D + {}^t(D^2) = {}^t(D^2 - D) = {}^t A.$$

Finalement, on a:

$$A = {}^t com(D) = com({}^t D),$$

i.e. l'équation $com(X) = A$ admet $X = {}^t D$ pour solution.

Ainsi, étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a l'équivalence:

$$A \in M_n(C) \textit{ est une comatrice } \Leftrightarrow \; rg(A) \in \{\,0, 1, n\,\}.$$

Application numérique. Trouvons la matrice X telle que:

$$com(X) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 2 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ n-1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ n & 0 & \ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Première solution. Dans ce cas $rg(A) = 1$ et $tr(A) = 1 \neq 0$: A *est diagonalisable* et on peut trouver la matrice X telle que $com(X) = A$ en suivant la méthode décrite ci-dessus - **Cas 2** - : $\beta = tr(A) = 1$ et

$$\mathbf{X = C = I_n - {}^t A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & \ldots\ldots & -(n-1) & -n \\ 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deuxième solution (sans utiliser ce qui précède). La matrice A étant de rang $rg(A) = 1$ admet l'écriture générale $A = U{}^t V$ où U et V sont des vecteurs colonnes non nuls. Dans notre cas $U = {}^t(1, 2....n)$ et $V = {}^t(1, 0......0)$. Si X existe on doit avoir : $X^tA = {}^tAX = 0$ ou encore : $XV^tU = 0$ $(\star)$ et $V^tUX = 0$ $(\star)$. En multipliant les deux membres de l'égalité $(\star)$ par U à droite et en simplifiant par le réel non nul ${}^tUU = \|U\|^2$, on obtient $XV = 0$, i.e. la première colonne de X est nulle, les $n - 1$ dernères colonnes formant une famille libre.

De même, en multipliant les deux membres de l'égalité $(\star)$ par ${}^tV$ à gauche, on obtient ${}^tUX = 0$, et donc les colonnes de la matrice A sont orthogonales au vecteur U - pour le produit scalaire usuel. Finalement, on trouve la même matrice X que celle trouvée à la première solution.

Références

1. J.M. Arnaudiès, H. Fraysse – *Cours d'algèbre*, t. 1, Dunod, Paris, 1987.
2. M. Cognet – *Algèbre linéaire*, Bréal, Paris, 2000.

Recreaţii ... matematice

(*Răspuns la recreaţia de la p. 113*)

Indiferent de ce semne $+$ sau $-$ am pune în $1-2-3-4-5-6-7-8-9$ în locul spaţiilor, rezultatul final va fi un număr impar; într-adevăr, 1 operat cu 2 dă un număr impar, rezultatul obţinut operat cu 3 dă un număr par, acesta operat cu 4 dă un număr par ş.a.m.d. Aşadar, 0 nu poate apărea ca rezultat final.

Iată câteva exemple în sensul dorit:

$1-2-34+5+6+7+8+9=0,$ $\quad$ $12+3+4-5-6-7+8-9=0,$
$12+3-4+5-6+7-8-9=0,$ $\quad$ $12-3+4+5+6-7-8-9=0,$
$12-3-4-5+6-7-8+9=0,$ $\quad$ $12-3-4-5-6+7+8-9=0.$

Fără restricţia ca doar un singur spaţiu să fie şters, indicăm şi soluţiile:

$1+2-34-56+78+9=0,$ $\quad$ $1-23-4-56-7+89=0,$
$12+3-45+6+7+8+9=0,$ $\quad$ $12+34-56-7+8+9=0,$
$12-3+4+56-78+9=0.$