CORESPONDENŢE

Racines d'une suite de polynômes orthogonaux

Adrien REISNER[1]

Abstract. We study here a set of orthogonal polynomials, basis of $\mathbb{R}_n[X]$, and their roots.
Keywords: polinomial, scalar product, orthogonal polynomials.
MSC 2010: 33C52.

On pose

$$A(X) = X^2 - 1 \ \text{ et } \ B(X) = 2X.$$

On considère l'application:

$$\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X], \qquad P \longrightarrow \Phi(P) = AP'' + BP'.$$

Proposition 1. *$R_n[X]$ étant l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, pour tout entier naturel n la restriction de Φ à $R_n[X]$, notée Φ_n, définit un endomorphisme de $R_n[X]$.*

Démonstration. Φ est linéaire, par linéarité de la dérivation et distributivité de la multiplication sur l'addition. On remarque que

$$(\bullet) \qquad \Phi(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geq 2.$$

Ainsi, $\Phi(\mathbb{R}_n[X]) = \text{Vect}(\Phi(1), \Phi(X), ..., \Phi(X^n)) \subset \mathbb{R}_n[X]$ - chaque $\Phi(X^k)$ étant dans $\mathbb{R}_n[X]$, pour $k \leq n$; i.e. $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ. Finalement, Φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Théorème 2. *L'application:*

$$(P, Q) \longrightarrow < P, Q > \ = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $R[X]$, et on a:

$$< XP, Q > = < P, XQ > .$$

Démonstration. L'application $<\ ,\ >$ est symétrique, linéaire par rapport à la seconde variable. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $< P, P > = \int_{-1}^{1} P(t)^2 dt \geq 0$. Si cette quantité est nulle, alors P^2 est nul sur $[-1, 1]$ (positif, continu, d'intégrale nulle) et donc $P = 0$ (polynôme avec une infinité de racines). On a, donc, bien un produit scalaire.

[1]TELECOM ParisTech; *adrien.reisner@yahoo.fr*

Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$< XP, Q > \; = \int_{-1}^{1} tP(t)Q(t)dt = \; < P, XQ > .$$

Théorème 3. *L'endomorphisme* Φ_n *vérifie:*

$$< \Phi_n(P), Q > \; = \; < P, \Phi_n(Q) >, \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],$$

i.e. Φ_n *est* **auto-adjoint** *- pour le produit scalaire défini plus haut.*

Démonstration. En effet, comme $B(X) = A'(X)$, on a:

$$\begin{aligned} < \Phi(P), Q > - < P, \Phi(Q) > &= \int_{-1}^{1} \left[P''(t)Q(t) - P(t)Q''(t)\right] A(t) \\ &\qquad + \left[P'(t)Q(t) - P(t)Q'(t)\right] A'(t)dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left\{\left[P'(t)Q(t) - P(t)Q'(t)\right] A(t)\right\}' dt = \left[(P'Q - PQ')A\right]_{-1}^{1} = 0, \end{aligned}$$

d'où, l'affirmation du théorème.

En particulier, Φ_n étant auto-adjoint, sa matrice dans toute base *orthogonale* de $\mathbb{R}_n[X]$ est *symétrique*. Compte tenu de la relation ($\bullet$), la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit:

$$M_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 2 & 0 & .... & .... & 0 \\ 0 & 0 & 6 & .... & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & -n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .... & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

C'est une matrice triangulaire et ses valeurs propres sont donc les coefficients diagonaux de M_n: $\mathrm{Sp}(\Phi_n) = \{\ k(k+1) \mid 0 \leq k \leq n\}$.

Remarque. La matrice M_n n'est pas symétrique, la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ n'étant pas orthogonale pour le produit scalaire défini précédemment.

L'endomorphisme Φ_n étant auto-adjoint (- i.e. symétrique -) on a immédiatement le théorème suivant [**2**, p.104]:

Théorème 4. *L'endomorphisme* Φ_n *est diagonalisable, i.e. il existe une base* $\mathcal{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ *orthonormée de l'espace vectoriel* $R_n[X]$ *qui est formée des vecteurs propres (polynômes propres) de* Φ_n.

On se propose de montrer l'existence d'une telle base orthonormée $\mathcal{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ formée des polynômes propres *unitaires* et vérifiant la condition

$$\deg(P_k) = k, \qquad \forall k \in \overline{0, n}.$$

En effet, Φ_n possède $n+1$ valeurs propres *distinctes*. Les sous-espaces propres sont des droites vectorielles de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\mathrm{Ker}(\Phi_n - k(k+1)Id_{\mathbb{R}_n[X]}) = Vect(P_k) = \mathbb{R}P_k, \quad \forall k \in \overline{0,n}.$$

D′autre part, Φ_{k+1} possède une valeur propre de plus que Φ_k. Il y a, donc, un vecteur propre (polynôme propre) de Φ_{k+1} qui n′est pas vecteur propre de Φ_k, c′est un polynôme de degré $\leq k+1$ qui n′est pas de degré $\leq k$, et qui est donc de degré $k+1$. Ceci montre que Φ_n possède un polynôme propre de degré $0, 1, ..., n$. Un multiple d′un vecteur propre étant encore propre, on peut se ramener au cas d′un *polynôme unitaire*, c.q.f.d.

En particulier: $< P_i, P_k >= 0, \forall i \neq k$, $\forall i, k \in \overline{0,n}$, et $P_k \in$Vect$(P_0, ..., P_{k-1})^{\perp} = \mathbb{R}_{k-1}[X]^{\perp}, \forall k \in \overline{1,n}$. Par conséquent, on a le théorème suivant :

Théorème 5. *a) Pour tout $i \neq k$ on a: $< P_i, P_k > = 0$.*
b) Le polynôme P_n appartient à l′orthogonal de l′espace vectoriel $R_{n-1}[X]$.

Exemple. Les premiers quatre polynômes de cette base sont :

$$P_0(X) = 1, \quad P_1(X) = X, \quad P_2(X) = X^2 - \frac{1}{3}, \quad P_3(X) = X(X^2 - \frac{3}{5}).$$

Théorème 6. *Pour $n \geq 2$, il existe un réel λ_n tel que*

$$P_n - (X - \lambda_n)P_{n-1} = S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X].$$

Démonstration. $P_n(X)$ et $XP_{n-1}(X)$ étant des polynômes unitaires de degré n, on a: $P_n(X) - XP_{n-1}(X) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, i.e. $P_n(X) - XP_{n-1}(X) = \lambda'_n X^{n-1} + ...$ En posant $\lambda_n = -\lambda'_n$, on constate facilement que $S_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$.

Théorème 7. *Si $n \geq 3$, alors $< S_n, P_k > = 0$, pour tout $k \leq n-3$.*

Démonstration. Soit $k \leq n-3$. Compte tenu du théorème 2, il vient: $< XP_{n-1}, P_k > = < P_{n-1}, XP_k > = 0$, car le polynôme $XP_k \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et, de plus, il est orthogonal à P_{n-1}. Par suite, pour tout $k \leq n-3$, on a:

$$< S_n, P_k > \ = \ < P_n, P_k > - < XP_{n-1}, P_k > \ + \lambda_n < P_{n-1}, P_k > \ = 0.$$

Théorème 8. *Pour $n \geq 2$, il existe $(\lambda_n, \mu_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$P_n(X) = (X - \lambda_n)P_{n-1}(X) - \mu_n P_{n-2}(X).$$

Démonstration. Les polynômes S_n et P_{n-2} appartiennent tous les deux au sous-espace $\mathbb{R}_{n-2}[X] \cap \mathbb{R}_{n-3}[X]^{\perp}$ et cet espace est une droite vectorielle (l′orthogonal d′un espace de dimension $n-2$ dans un espace de dimensions $n-1$ est de dimension 1). Ces deux polynômes sont, donc, colinéaires et comme $P_{n-2} \neq 0$, il existe μ_n tel que $S_n = -\mu_n P_{n-2}$. Il vient alors:

$$P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}.$$

Considérons le produit scalaire de cette expression avec P_{n-2}; on obtient:

$$\mu_n \parallel P_{n-2} \parallel^2 \; = \; < XP_{n-1}, P_{n-2} > \; = \; < P_{n-1}, XP_{n-2} > .$$

Or, le polynôme XP_{n-2} se décompose dans la base $\mathcal{B}$ sous la forme suivante : $XP_{n-2} = P_{n-1} + k_{n-2}P_{n-2} + ...k_0P_0$, d'où:

$$\mu_n \parallel P_{n-2} \parallel^2 = < P_{n-1}, P_{n-1} > > 0$$

(strictement), soit $\mu_n \in \mathbb{R}_+^*$, c.q.f.d.

Exemple. Pour les polynômes P_2, P_3 (voir exemple ci-dessus), on trouve: $\lambda_2 = \lambda_3 = 0, \mu_2 = \dfrac{1}{3}, \mu_3 = \dfrac{4}{15}$.

Théorème 9. *Pour tout $k \geq 1$, on a: a)* $\int_{-1}^{1} P_k(t)dt = 0$,
b) le polynôme P_k admet au moins une racine d'ordre impair dans $]-1,1[$.

Démonstration. a) En effet, $\int_{-1}^{1} P_k(t)dt = < P_k, P_0 > = 0$, car le polynôme P_k est orthogonal au polynôme $P_0 = 1$.

b) Raisonnons par l'absurde. Si le polynôme P_k n'admaittait que des racines d'ordre pair dans $]-1,1[$, ce polynôme serait alors de signe constant sur $]-1,1[$ - les racines avec changement de signe sont celles d'ordre impair -, et donc aussi (par continuité) sur $[-1,1]$. Le polynôme P_k étant continu et d'intégrale nulle sur $[-1,1]$, ce polynôme serait alors nul sur $[-1,1]$, i.e. $P_k(x) = 0, \forall x \in [-1,1]$. C'est impossible, et par suite le polynôme P_k possède donc au moins une racine d'ordre impair dans $]-1,1[$, c.q.f.d.

Corollaire 10. *Le polynôme P_n admet* **n racines simples** *dans* $]-1,1[$.

Démonstration. Désignant par $x_1, ..., x_r$ les racines d'ordre impair distinctes de P_n dans $]-1,1[$, on considère le polynôme $Q(X) = \prod_{k=1}^{r}(X - x_k)$. Démontrons alors ce corollaire par l'absurde, en supposant que $r < n$. On a alors $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et par suite $< Q, P_n > = \int_{-1}^{1} Q(t)\, P_n(t)\, dt = 0$. Or, par définition même du polynôme Q, le polynôme QP_n n'a que des *racines d'ordre pair* dans $]-1,1[$ et donc il est de signe constant sur $[-1,1]$. On aboutit à une contradiction comme précédemment. On a, donc, au moins n racines d'ordre impair dans $]-1,1[$ pour le polynôme P_n. Mais P_n admettant au plus n racines comptées avec leur multiplicités, les ordres valent nécessairement 1 et il n'y a pas d'autres racines. Finalement, P_n est *scindé à racines simples* [**1,** p.286], et ses racines sont toutes dans $]-1,1[$.

Bibliographie

1. **J.-M. Arnaudiès, H. Fraysse** – *Cours d'algèbre,* t. 1, Dunod , Paris, 1987.

1. **J-M. Arnaudiès, H. Fraysse** – *Cours de mathématiques,* t. 4, Dunod, Paris, 1990.