Calcul matriciel – une décomposition particulière

Adrien REISNER [1]

Abstract. In this article we present the *LU decomposition* of a square non-singular matrix A with a particular case of a tridiagonal matrix. We obtain a necessary and sufficient condition for the existence of this decomposition.

Keywords: decomposition LU, tridiagonal matrix.

MSC 2010: 15A21, 15A23.

I. Décomposition LU d'une matrice A inversible

$\{E_{i,j}\}$ étant l'ensemble des matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, désignons par $M_{i,j}$ la matrice qui échange les lignes i et j de la matrice unité I_n, i.e

$$M_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i} + \sum_{k \neq i,j} E_{k,k}.$$

Théorème 1. *Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $M_{i,j}A$ est obtenue à partir de la matrice A en interversant les lignes i et j. De plus, $\det M_{i,j} = -1$ et par suite $M_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Pour tout couple (p, q), on a: $M_{i,j}E_{p,q} = E_{p,q}$, si $p \neq i, j$ et $M_{i,j}E_{i,q} = E_{j,q}$, $M_{i,j}E_{j,q} = E_{i,q}$. La multiplication à gauche par $M_{i,j}$ échange les lignes i et j des matrices de la base $\{E_{i,j}\}$. Par linéarité de la mutiplication par $M_{i,j}$, il en est de même pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\det M_{i,j}$ est obtenue en échangeant deux lignes de la matrice unité I_n, on a par suite: $\det M_{i,j} = -\det I_n = -1$, i.e. $M_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $i, j : 1...n$ posons $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ - matrice de *transvection*.

Théorème 2. *Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue à partir de la matrice A en ajoutant à la i-ème ligne la j-ème ligne de A multipliée par λ.*

Démonstration. Pour tout couple d'indices (p, q), on a:

$$T_{i,j}(\lambda)E_{p,q} = E_{p,q} \textit{ si } p \neq q \textit{ et } T_{i,j}(\lambda)E_{j,q} = E_{j,q} + \lambda E_{i,q}$$

Par suite, pour les matrices de la base $\{E_{i,j}\}$ la mutiplication à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ ajoute à la i-ème ligne de la matrice sa j-ème ligne multipliée par λ. Par linéarité de la multiplication par $T_{i,j}(\lambda)$ il en est de même pour tout matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque. On a: $T_{i,j}(-\lambda) \times T_{i,j}(\lambda) \times I_n = I_n$ et, donc, $(T_{i,j}(\lambda))^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$.

Théorème 3. *Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ il existe une matrice $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $MA = U$, où U est une matrice triangulaire supérieure.*

[1] TELECOM ParisTech; *adrien.reisner@yahoo.fr*

Démonstration. On uilise la *méthode du pivot de Gauss* - voir [**1**], [**3**]. La matrice A étant inversible, sa première colonne n'est pas nulle. Si $a_{i_1,1} \neq 0$, la matrice $M_{1,i_1}A = (b_{i,j})$ vérifie $b_{1,1} \neq 0$. On remplace alors, pour $2 \leq i \leq n$, la ligne L_i de cette matrice par $L_i - \dfrac{b_{i,1}}{b_{1,1}}L_1$, i.e. en multipliant à gauche par la matrice de transvection $T_{i,1}(-\dfrac{b_{i,1}}{b_{1,1}})$. On obtient ainsi une matrice $A^{(1)} = (a_{i,j}^{(1)})$ dont les termes de la première colonne sont nuls à part le premier. B_1 étant la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de $A^{(1)}$, il vient: $\det A^{(1)} = a_{1,1}^{(1)} \times \det B_1$ et $\det B_1 \neq 0$. La matrice B_1 est donc inversible et sa deuxième colonne possède donc un terme non nul $a_{i_2,2}^{(1)}$ avec $i_2 \geq 2$. En multipliant $A^{(1)}$ à gauche par M_{2,i_2} on obtient une matrice dont le terme d'indice $(2,2)$ est non nul. En multipliant à gauche la matrice obtenue par des matrices de la forme $T_{i,2}(\lambda)$ pour $3 \leq i \leq n$, on obtient une matrice $A^{(2)}$ de la forme $A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(2)} & a_{1,2}^{(2)} & \ldots\ldots & a_{1,n-1}p^{(2)} & a_{1,n}^{(2)} \\ 0 & a_{2,2}^{(2)} & \ldots\ldots\ldots & a_{2,n-1}^{(2)} & a_{2,n}^{(2)} \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & B_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$, où $a_{1,1}^{(2)}$ et $a_{2,2}^{(2)}$ ne sont pas nuls et B_2 est inversible. On poursuit le procédé afin d'obtenir une suite de matrices $A^{(1)}, A^{(2)}, ..., A^{(n-1)}$ dans laquelle la matrice $A^{(p)}$ a tous ses termes d'indice (i,j) avec $j \leq p$ et $i > j$ qui sont nuls. La matrice $A^{(n-1)}$ est donc triangulaire supérieure: on pose $A^{(n-1)} = U$. La matrice U est ainsi obtenue en multipliant à gauche la matrice A par des matrices de la forme $M_{i,j}$ ou $T_{i,j}(\lambda)$. Le produit de ces matrices inversibles est une matrice inversible qu'on désigne par M. Finalement, on a: $MA = U$, c.q.f.d.

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$, on note $A_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice obtenue à partir de A en gardant les p premières lignes et les p premières colonnes de la matrice A.

Corollaire 4. *Pour $A \in GL_n(R)$ une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$ est que: $\forall p : 1...n$, $\det A_p \neq 0$. De plus, on peut supposer que la diagonale de la matrice L est constituée de 1. Dans ce cas, la décomposition $A = LU$ est unique.*

Démonstration. *Condition nécessaire.* Supposons l'existence d'une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que $A = LU$. Pour tout $1 \leq p \leq n$ on a alors: $A_p = L_pU_p$. En effet, L est de la forme $\begin{pmatrix} L_p & O \\ \times & \times \end{pmatrix}$ et U de la forme $\begin{pmatrix} U_p & \times \\ O & \times \end{pmatrix}$ et, par conséquent, A est de la forme $\begin{pmatrix} L_pU_p & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}$ et $A_p = L_pU_p$. La matrice A étant inversible, il en est de même les matrices L et U; ces deux matrices étant triangulaires, leurs termes diagonaux sont non nuls. Pour $1 \leq p \leq n$ les matrices L_p et U_p ont leurs termes diagonaux non nuls. Elles sont donc inversibles et il en est de même pour leur produit A_p. Finalement, $\forall p : 1...n$, $\det A_p \neq 0$.

Condition suffisante. Inversement, soit donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $1 \leq p \leq n$, $\det A_p \neq 0$. On utilise les résultats de la démonstration du théorème précédent. On a $\det A_1 = a_{1,1} \neq 0$. On obtient $A^{(1)}$ en multipliant A par un produit de matrices de la forme $T_{i,1}(\lambda)$ avec $2 \leq i \leq n$. La matrice $A^{(1)}$ s'obtient à partir de A en effecuant des opérations élémentaires sur les lignes. Il en est de même de $A_2^{(1)}$ à partir de A_2. On a donc $\det A_2^{(1)} = \det A_2 \neq 0$. Comme $A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \times \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, on a: $a_{2,2}^{(1)} \neq 0$ et $a_{2,2}^{(1)}$ peut servir donc pour pivot. La matrice $A^{(2)}$ s'obtient à partir de $A^{(1)}$ par multiplication à gauche seulement par des matrices de transvection $T_{i,2}(\lambda)$ avec $3 \leq i \leq n$. En poursuivant ce raisonnement $A^{(p-1)}$ est construite à partir de A par des transformations élémentaires sur les lignes. Il en est de même de $A_p^{(p-1)}$ à partir de A_p. On obtient: $\det A_p^{(p-1)} = \det A_p \neq 0$. Comme par construction la matrice $A_p^{(p-1)}$ est triangulaire supérieure on en déduit $a_{p,p}^{(p-1)} \neq 0$ et on peut se servir de ce terme comme pivot.

Finalement, la matrice M est le produit de matrices de la forme $T_{i,j}(\lambda)$ pour $i > j$ (en effet, à la première étape on a $j = 1$, $i \geq 2$, à la seconde $j = 2$, $i \geq 3$ etc.). Toutes ces matrices sont triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale. La matrice est inversible et $L = M^{-1}$ est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. Enfin, de la relation $MA = U$ on en déduit: $A = LU$, c.q.f.d.

On peut supposer de plus que la diagonale de L est constituée de 1. Dans ce cas la décomposition $A = LU$ est unique. En effet, supposons l'existence de deux telles décompositions $A = LU = L'U'$. Il vient alors $L'^{-1}L = U'U^{-1}$. Comme $L'^{-1}L$ est triangulaire inférieure avec une diagonale de 1 et $U'U^{-1}$ est triangulaire supérieure on a nécessairement $L'^{-1}L = U'U^{-1} = I_n$, et donc $L = L'$ et $U = U'$.

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang $r < n$ et si $\det A_p \neq 0$ pour tout $1 \leq p \leq r$, alors la matrice A admet une décomposition $A = LU$. De plus, on peut choisir l'une des deux matrices L ou U inversible. L et U sont inversibles toutes les deux si et seulement si $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

II. Cas particulier d'une matrice A tridiagonale

Je considère une matrice tridiagonale, i.e. une matrice de la forme suivante: $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec $a_{i,i} = a_i$, $a_{i,i+1} = b_i$, $a_{i+1,i} = c_i$ pour tout $i : 1...n-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon, i.e.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & ...... & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & ...... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ...... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ...... & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & ...... & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

Posons - avec les notations de la première partie - $\Delta_k = \det A_k$.

Théorème 5. *On a la récurrence:* $\Delta_k = a_k \times \Delta_{k-1} - b_{k-1} \times c_{k-1} \times \Delta_{k-2}$ $(*)$.

Démonstration. On a: $\Delta_1 = a_1$, $\Delta_2 = a_1a_2 - b_1c_1$ et pour $k \geq 3$ on obtient en développant Δ_k par rapport à la dernière ligne:

$$\Delta_k = a_k\Delta_{k-1} - c_{k-1}\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & ...... & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & ...... & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ...... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ...... & c_{k-3} & a_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ...... & 0 & c_{k-2} & b_{k-1} \end{pmatrix},$$

d'où $(*)$ en développant ce dernier déterminant par rapport à la dernière colonne.

Théorème 6. *Lorsque $\Delta_k \neq 0$ pour tout k, la matrice A admet une décomposition LU unique de la forme suivante:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ...... & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & ...... & 0 & 0 \\ ... & ... & ...... & ... & ... \\ 0 & 0 & ...... & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Delta_1 & b_1 & ...... & 0 \\ 0 & \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} & ...... & 0 \\ ... & ... & ...... & ... \\ 0 & 0 & ...... & \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Avec $L = (l_{i,j})$ et $U = (u_{i,j})$, où $l_{i,i} = 1$ pour tout i, $l_{i,i-1} = l_{i-1}$, $u_{i,i} = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ pour tout i (avec $\Delta_0 = 1$) et $u_{i,i+1} = b_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, la matrice $A = LU = (a_{i,j})$ vérifie $a_1 = a_{1,1} = \Delta_1$, $a_i = a_{i,i} = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} + l_{i-1}b_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq n$, $b_i = a_{i,i+1} = u_{i,i+1} = b_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, et enfin $c_{i-1} = a_{i,i-1} = l_{i-1}u_{i-1,i-1} = l_{i-1}\dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_{i-2}}$ pour $2 \leq i \leq n$.

On doit avoir pour $2 \leq i \leq n$: $l_{i-1} = \dfrac{c_{i-1}\Delta_{i-2}}{\Delta_{i-1}}$, ce qui définit les $l_1, l_2, ..., l_{n-1}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que pour tout $2 \leq i \leq n$:

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} + l_{i-1}b_{i-1} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}} + \frac{c_{i-1}b_{i-1}\Delta_{i-2}}{\Delta_{i-1}},$$

c'est à dire: $\Delta_i = a_i\Delta_{i-1} - b_{i-1}c_{i-1}\Delta_{i-2}$ ce qui résulte du Théorème 5. Cette décomposition est unique - voir Corollaire 4.

Remarque. Du Corollaire 4, il en résulte que la non-nullité de tous les Δ_k est aussi une condition nécessaire pour l'existence d'une telle décomposition.

Cas particulier de matrice tridiagonale. Soit la matrice tridiagonale A avec: $a_{i,i} = 2a$ pour tout $i : 1...n$ et $b_j = c_j = -1$ pour tout $j : 1...n-1$.

Théorème 7. *La décomopsition LU de la matrice A existe si et seulement si a n'est pas de la forme $a = cos\dfrac{m\pi}{k+1}$ avec $1 \leq m \leq k \leq n$.*

Démonstration. Avec $\Delta_0 = 1$, la suite (Δ_k) vérifie la relation récurrente linéaire d'ordre 2: $\Delta_k = 2a\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}$ pour $2 \leq k \leq n$. Le trinôme $r^2 - 2ar + 1$ admet pour discriminant $\delta = 4a^2 - 4$. Distinguons trois cas suivant la valeur de a:

1. $\underline{|a|>\mathbf{1}}$. Dans ces conditions, $\delta > 0$ et l'équation $r^2 - 2ar + 1 = 0$ admet deux racines réelles distinctes $a + \sqrt{a^2-1}$ et $a - \sqrt{a^2-1}$. Il existe par suite deux réels K_1 et K_2 tels que pour tout $1 \leq k \leq n$: $\Delta_k = K_1(a + \sqrt{a^2-1})^k + K_2(a - \sqrt{a^2-1})^k$. On obtient avec $k = 0$ et $k = 1$:

$$K_1 + K_2 = 1 \text{ et } K_1(a + \sqrt{a^2-1}) + K_2(a - \sqrt{a^2-1}) = 2a$$

soit, finalement, pour tout $1 \leq k \leq n$:

$$\Delta_k = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \times [(a + \sqrt{a^2-1})^{k+1} - (a - \sqrt{a^2-1})^{k+1}].$$

La condition $\Delta_k = 0$ équivaut à $(a + \sqrt{a^2-1})^{k+1} = (a - \sqrt{a^2-1})^{k+1}$. Dans ces conditions: $a + \sqrt{a^2-1} = \pm(a - \sqrt{a^2-1})$; on en déduit au carré $a\sqrt{a^2-1} = 0$ ce qui est impossible puisque $|a| > \mathbf{1}$. Finalement, lorsque $|a| > \mathbf{1}$, on a $\Delta_k \neq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$, et la matrice A peut s'écrire sous la forme $A = LU$.

Si $a > 1$, il existe $t > 0$ tel que $a = \cosh t$ et dans ce cas $\Delta_k = \dfrac{\sinh(k+1)t}{\sinh t}$.

Si $a < -1$, il existe $t > 0$ tel que $a = -\cosh t$ et alors $\Delta_k = (-1)^k \dfrac{\sinh(k+1)t}{\sinh t}$.

2. $\underline{a = \pm\mathbf{1}}$. Dans ce cas, $\delta = 0$ et a est la seule racine de $r^2 - 2ar + 1 = 0$. Il existe alors K_1 et K_2 réels tels que pour $1 \leq k \leq n$: $\Delta_k = a^k(K_1 k + K_2)$. On obtient en considérant $\Delta_0 = 1 = K_2$ et $\Delta_1 = 2a = a(K_1 + 1)$:

$$\Delta_k = k + 1 \textit{ si } a = 1 \textit{ et } \Delta_k = (-1)^k(k+1) \textit{ si } a = -1.$$

Dans ce cas, de même que précédemment, aucun Δ_k n'est nul et A possède une décomposition LU.

3. $\underline{|a| < \mathbf{1}}$. Dans ce cas, $\delta < 0$ et les racines de $r^2 - 2ar + 1 = 0$ sont complexes conjuguées: $a + i\sqrt{1-a^2}$ et $a - i\sqrt{1-a^2}$. En posant $\theta = \arccos a \in]0, \pi[$, il vient alors $\sqrt{1-a^2} = \sin\theta$ et les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$. Il existe deux nombres complexes K_1 et K_2 tels que pour tout $1 \leq k \leq n$: $\Delta_k = K_1 e^{ik\theta} + K_2 e^{-ik\theta}$ avec $K_1 + K_2 = 1$ et $K_1 e^{i\theta} + K_2 e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ soit $K_1 = \dfrac{e^{i\theta}}{2i\sin\theta}$ et $K_2 = -\dfrac{e^{-i\theta}}{2i\sin\theta}$, d'où, finalement:

$$\Delta_k = \frac{1}{2i\sin\theta}[e^{i(k+1)\theta} - e^{-i(k+1)\theta}] = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}.$$

$\Delta_k = 0$ équivaut à $(k+1)\theta \in \pi\mathbb{Z}$. Comme $\theta \in]0, \pi[$, $\Delta_k = 0$ si et seulement si $\theta = \dfrac{m\pi}{k+1}$ avec $1 \leq m \leq k$. On en déduit que la décomposition LU de la matrice A existe si et seulement si a n'est pas de la forme $a = \cos\dfrac{m\pi}{k+1}$ avec $1 \leq m \leq k \leq n$, d'où le Théorème 7.

Bibliographie

1. **H. Roudier** – *Algèbre linéaire*, édition Vuibert, Paris, 2008.
2. **J. Fresnel** – *Algèbre des matrices*, édition Hermann, Paris, 1997.
3. **R. Goblot** – *Algèbre linéaire*, éditon Scientifika, Paris, 1994.