CORESPONDENȚE

La cissoïde, podaire de la parabole

Adrien REISNER[1]

Abstract. The cissoid (C) is a pedal curve of a parabola (P) with respect to the point $A\left(\frac{p}{3},-p\right)$ of (P). The polar equation of (C) is

$$\rho=-\frac{p}{2}\times\frac{(\cos\theta-\sin\theta)^2}{\cos\theta}.$$

The inverse curve with center A and radius $k=\frac{9p^2}{4}$ of (C) is a parabola $\mathcal{P}$.

Keywords: pedal curve, cissoid, inversion.

MSC 2010: 14H50.

Dans un repère orthonormé (Ox,Oy) soitent les points $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ et $A\left(\frac{p}{2},-p\right)$, où p est une longueur constante. Désignons par (P) la parabole ayant F pour foyer et O pour sommet. Le point A appartient à cette parabole. Tout point M de (P) est repéré par son ordonnée égale à pt, où t est un réel variable. La perpendiculaire du point A sur la tangente en M à (P) coupe cette tangente en H. La tangente au point $M\left(\frac{1}{2}pt^2,pt\right)$ à (P) admet pour équation: $x-ty+\frac{1}{2}pt^2=0$, la perpendiculaire à cette tangente issue de A a pour équation : $tx+y-\frac{1}{2}pt+p=0$. Finalement, le point H admet pour coordonnées:

$$H\ :\ x=-p\frac{t}{1+t^2},\ \ y=\frac{p}{2}\times\frac{t^3+t-2}{1+t^2}. \tag{1}$$

Dans notre cas on a la définition suivante:

Définition 1. *Lorsque M décrit la parabole (P), l'ensemble (C) des points H est appelé podaire de (P) pour le pôle A.*

Son équation paramétrique est donnée par (1).

On construit la courbe (C) sans dificulté:

$$\frac{dx}{dt}=p\times\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{p}{2}\times\frac{(t+1)(t^3-t^2+3t+1)}{(1+t^2)^2};$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{t^3-t^2+3t+1}{2(t-1)}\quad (t\neq 1).$$

Le tableau de variations est le suivant:

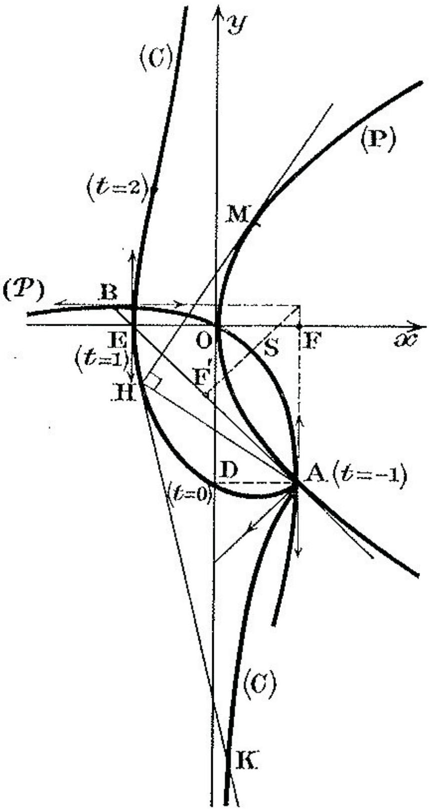
[1] TELECOM ParisTech; e-mail: *adrien_reisner@yahoo.fr*

t	$-\infty$		-1		t_0		1		$+\infty$
$\frac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{p}{2}$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$-\frac{p}{2}$	$\nearrow$	0
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-p$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

La courbe (C) présente un point stationnaire pour $t = -1$: c′est le point A. La tangente en A est parallèle à la première bissectrice et A est un point de rebroussement de première espèce $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{p}{2}, \ \dfrac{d^3x}{dt^3} = -\dfrac{3p}{2}, \ \dfrac{d^3y}{dt^3} = 0\right)$ – voir figure –.

Théorème 2. *Trois points $M_i(t_i) \in (C)$, $i : 1, 2, 3$, sont allignés si et seulement si on a la relation:*

$$t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3) = 2. \tag{2}$$



Démonstration. Soit $ux + vy + w = 0$ l′equation d′une droite quelconque du plan: elle coupe (C) en trois points dont les trois paramètres sont les racines de l′équation

$$pvt^3 + 2wt^2 + p(v - 2u)t + 2w - 2pv = 0.$$

La courbe (C) est une *cubique* (trois points communs avec une droite). Les paramètres cherchés vérifient: $t_1 + t_2 + t_3 = -\dfrac{2w}{pv}$ et $t_1 \times t_2 \times t_3 = -\dfrac{2w}{pv} + 2$, i.e. la relation (2).

Réciproquement, soient trois points H_1, H_2 et H_3 de (C) dont les paramètres vérifient la relation (2) du Théorème. La droite H_1H_2 recoupe (C) en H_3' correspondant à t_3'; ainsi H_1, H_2 et H_3' sont alignés et par suite, compte tenu du Théorème, on a: $t_1t_2t_3' - (t_1 + t_2 + t_3') = 2$. Or, par hypothèse nous avons: $t_1t_2t_3 - (t_1 + t_2 + t_3) = 2$. On en déduit immédiatement $t_3 = t_3'$; donc les points H_3 et H_3' sont confondus, et ainsi le théorème est démontré.

Corollaire 3. *Le point $t = 2$: $x = -\dfrac{2}{5} \times p$, $y = \dfrac{4}{5} \times p$ est point d′inflexion de la courbe (C).*

Démonstration. La tangente d′inflexion à (C) coupe cette courbe en trois points allignés et confondus, donc t_1, t_2 et t_3 ont la même valeur t. Les inflexions se trouvent parmis les points dont les paramètres satisfont à: $t^3 - 3t - 2 = 0$. La racine double correspond au point A de rebroussement. L′inflexion correspond à la troisième racine $t = 2$ de cette équation. On trouve le point $(x = -\dfrac{2}{5} \times p, y = \dfrac{4}{5} \times p)$.

Soit $H(t_0) \in (C)$. La tangente en H à (C) recoupe (C) au point $K(\theta)$: K est appelé le *tangentiel* de H. On a le

Corollaire 4. *Si les trois points $M_i(t_i) \in (C)$, $i : 1, 2, 3$, sont alignés, alors il en est de même de leurs tangentiels.*

Démonstration. La tangente en $H(t_0)$ à (C) coupe la courbe (C) en trois points allignés: H, H et K. À partir de la relation (2) du Théorème 2, on en déduit:

$$t_0^2\,\theta - (2t_0 + \theta) - 2 = 0 \ \text{ d'où } \ \theta = \frac{2}{t_0 - 1} \ \text{avec } (t_0 \neq 1).$$

On en déduit alors avec des notations évidentes:

$$\theta_1\theta_2\theta_3 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - 2 = 2\frac{2 - t_1t_2t_3 + t_1 + t_2 + t_3}{(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)}.$$

Le corollaire en résulte immédiatement.

Cas particuliers. 1) Le tangentiel du point à l'infini de (C) est le point $D(\theta = 0)$ situé sur l'asymptote Oy de (C) ($t \to \infty$ donne $\theta = 0$).

2) Si H tend vers le point $E(t = 1)$ de (C) situé sur l'axe Ox, son tangentiel K s'éloigne à l'infini sur (C) ($t \to \infty$) ce qui correspond au parallélisme de la tangente en E et de l'asymptote.

Remarque. Si un point est confondu avec son tangentiel, on doit avoir $t = \dfrac{2}{t-1}$; on trouve le point de rebroussement $A(t = -1)$ et le point d'inflexion $t = 2$.

Soit $\mathcal{R} = (AX, AY)$ un repère orthonormé dont l'origine est A et dont les axes sont parallèles à Ox et Oy.

Théorème 5. *L'équation cartésienne de la courbe (C) dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$ est*

$$X(X^2 + Y^2) + \frac{p}{2}(X - Y)^2 = 0.$$

Démonstration. Dans le repère $\mathcal{R}$ nous avons:

$$X = x - \frac{p}{2} = -\frac{p}{2} \times \frac{(1+t)^2}{1+t^2}, \quad Y = y + p = \frac{p}{2} \times \frac{t(1+t)^2}{1+t^2}.$$

On en déduit $t = -\dfrac{Y}{X}$ qui correspond au fait que AH est perpendiculaire à la tangente en M à la parabole, cette tangente ayant une pente égale à $\dfrac{1}{t}$. En éliminant t on obtient l'équation cherchée.

Remarque. La courbe (C) est une *cubique circulaire* ((C) passe par les points cycliques: points de coordonnées homogènes $(1, \pm i, 0)$). Elle possède un rebroussement en A et la tangente de rebroussement admet pour équation $X - Y = 0$. La courbe (C) est une *cissoïde.*

L'équation polaire de la cissoïde (C) s'écrit:

$$\rho\cos\theta + \frac{p}{2}(\cos\theta - \sin\theta)^2 = 0. \tag{3}$$

Soit $Inv\left(A, \dfrac{9p^2}{4}\right)$ l'inversion de pôle A et de puissance $\dfrac{9p^2}{4}$. On a alors:

Théorème 6. *La courbe inverse de* (C) *dans l'inversion* $Inv\left(A, \dfrac{9p^2}{4}\right)$ *est la parabole de foyer* $F'\left(-\dfrac{1}{16}p, -\dfrac{7}{16}p\right)$ *et de sommet* $S\left(\dfrac{7}{32}p, -\dfrac{5}{32}p\right)$.

Démonstration. La courbe inverse s'obtient à partir de l'équation polaire (3) de la cissoïde en conservant θ et en changeant ρ en $\dfrac{9p^2}{4} \times \dfrac{1}{\rho}$ et on revient en coordonnées cartésiennes. On peut aussi changer X en $\dfrac{kX}{X^2+Y^2}$ et Y en $\dfrac{kY}{X^2+Y^2}$ où $k = \dfrac{9p^2}{4}$. On obtient ainsi

$$\frac{9p}{2}X + (X-Y)^2 = 0$$

soit, en revenant aux axes initiaux:

$$\frac{9p}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right) + \left(x - y - \frac{3p}{2}\right)^2 = 0.$$

C'est une parabole (P') dont l'axe est parallèle à la première bissectrice; elle passe en A (tangente $X = 0$). Cette parabole passe par O (où la pente de la tangente est $-\dfrac{1}{2}$). Le point B où la tangente a une pente nulle a pour coordonnées $B\left(-\dfrac{5}{8}p, \dfrac{1}{8}p\right)$. Le foyer F' de (P') est la projection sur AB du point de concours des deux tangentes en A et en B puisque celles-ci sont perpendiculaires. Les coordonnées de F' sont: $F'\left(-\dfrac{1}{16}p, -\dfrac{7}{16}p\right)$. Enfin, le sommet S de la parabole (P') a pour coordonnées: $S\left(\dfrac{7}{32}p, -\dfrac{5}{32}p\right)$; c'est l'intersection de la parabole avec son axe qui est issu de F' et est parallèle à la première bissectrice: la pente de la tangente en S est -1.

Remarque. De façon générale, la pente de la tangente en un point de la parabole est donnée par

$$\frac{9p}{4} + \left(x_0 - y_0 - \frac{3p}{2}\right)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

$\dfrac{dy}{dx} = -1$ est bien l' axe de la parabole – voir la figure – .

Bibliografie

1. **G. Cagnac, E. Ramis, J. Commeau** – *Nouveau Cours de Mathématiques Speciales. Tome 4. Applications de l' Analyse à la Géométrie*, Masson et Cie, Paris, 1963.