Cercles et inversion

Adrien REISNER[1]

Abstract. In this paper we use the inversion for find certain locus concerning circles.
Keywords: orthogonal circles, inversion, locus.
MSC 2010: 97D40.

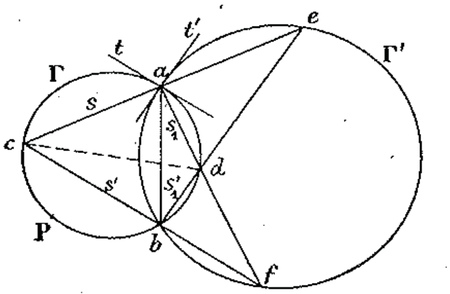
On donne trois points dans le plan A, B et P. Sur la droite (AB) on considère un point variable C. Soient (S) et (S') les cercles circonscrits aux triangles PAC et PBC respectivement. On trace le cercle (S_1) passant par P, A et orthogonal au cercle (S) et le cercle (S_1') passant par P, B et orthogonal au cercle (S').

Soient D, E, F les points de rencontre – autres que P – des couples de cercles $((S_1), (S_1'))$, $((S), (S_1'))$, $((S'), (S_1))$ respectivement.

Je désigne par Inv l'inversion $Inv(P, k)$ de pôle P et de puissance k, où k est un réel arbitraire non nul, i.e. la transformation qui au point M du plan fait correspondre le point $m = Inv(M)$ de la droite (PM) vérifiant la relation

$$\overline{PM} \times \overline{Pm} = k \quad \text{(produit des valeurs algébriques)}.$$

On transforme la figure par l'inversion Inv en désignant par $a, b, c, d, \ldots$ les inverses des points $A, B, C, D, \ldots$ La droite (AB) admet pour inverse le cercle (Γ) qui passe par les points P, a et b. Le point c est un point variable de ce cercle (Γ). Les cercles (S), (S'), (S_1), (S_1') ont respectivement pour inverses les droites $(ac), (bc), (ad)$ perpendiculaire à la droite (ac), et (bd) perpendiculaire à (bc) – voir figure –.



Proposition 1. *Les deux cercles (S) et (S') se coupent sous un angle constant θ.*

Démonstration. Lorsque le point c décrit le cercle (Γ), l'angle des droites (ca, cb) conserve une valeur constante θ. On en déduit la proposition 1.

Proposition 2. *Les cercles (S_1) et (S_1') se coupent sous le même angle constant θ.*

Démonstration. Les angles $\measuredangle cad$ et $\measuredangle cbd$ étant droits, le point d se trouve sur le cercle (Γ) diamétralement opposé au point c. Il vient donc:

$$(da, db) = (ca, cb) = \theta \quad \text{(angle de droites)}$$

[1] TELECOM ParisTech; e-mail: *Adrien.Reisner@telecom-paristech.fr*

et par conséquent les cercles (S_1) et (S_1') se coupent aussi sous le même angle θ, c.q.f.d.

Proposition 3. *a) Le lieu géométrique du point D est la droite (AB).*

b) Le lieu géométrique des points E et F est le cercle décrit sur (AB) comme diamètre.

Démonstration. Le lieu du point d étant le cercle (Γ) on en déduit immédiatement l′ assertion a) de la proposition 3.

b) Cherchons les lieux géométriques des points e et f. On a $(ea, eb) = (ca, db) = (ca, cb) + (cb, db)$ ou $(ea, eb) = \theta + \frac{\pi}{2}$. L′ angle des droites (ea, eb) étant constant, le point e décrit un cercle (Γ') passant par les points a et b.

On a de même $(fa, fb) = (da, cb) = (da, db) + (db, cb)$ ou $(fa, fb) = \theta + \frac{\pi}{2}$. Le point f décrit aussi le même cercle (Γ').

On se propose de montrer que les deux cercles (Γ) et (Γ') sont orthogonaux. Désignons par at et at' les tangentes à ces deux cercles au point a. Lorsque le point c est en a, on a $(ca, cb) = (at, ab) = \theta$. Quand le point e est en a, nous avons de même $(ea, eb) = (at', ab) = \theta + \frac{\pi}{2}$.

On en déduit:

$$(at', ab) - (at, ab) = \frac{\pi}{2},$$

soit finalement:

$$(at', at) = \frac{\pi}{2},$$

c.q.f.d. Ainsi le lieu des points e et f est le cercle (Γ') orthogonal au cercle (Γ) et passant par les points a et b.

Il en résulte que le lieu des points E et F est un cercle (Σ) passant par les points A et B et orthogonal à la droite (AB), i.e. le cercle de diamètre AB. La proposition 3 est ainsi démontrée.

Proposition 4. *Le centre du cercle circonscrit au triangle PCD se trouve sur la droite (AB).*

Démonstration. Le cercle (C) circonscrit au triangle PCD admet pour inverse la droite (cd). Celle-ci est orthogonale au cercle (Γ) puisqu′elle est un diamètre de ce cercle. (C) est donc orthogonal à la droite (AB): c′ est le cercle de diamètre AB, d′où la proposition 4.

Je tiens à remercier ici mes collègues *Mmes Anne-Françoise Chacun, Nadine Diop, MM. Christian Blin, Mourad Debbabi, Mehdi El-Kadaoui, Gilles Dauphin, Arnaud Galisson, Si Mohamed Laroussi, Yves Meugniot, Laurent Mondo Enny, Frédéric Pauget, Eric Peltier, Patrice Piétu, Jorge Queixalos, Nicolas Religieux, Jean-François Sintes* et les autres pour le soutien qu′ils m′ont apporté à l′écriture de mes articles.

Bibliografie

1. **Michèle Audin** – *Géométrie*, Éditions EDP, Paris, 2006.
2. **J. Commeau** – *Cours de Géométrie*, Éditions Masson, Paris, 1968.