Concursul Internaţional de Matematică ,,Vladimir Andrunachievici”

Ediţia a II-a, Chişinău, 5 ianuarie 2012

Clasa a VI-a

1. *Dacă la un număr natural se adună suma cifrelor lui, atunci se obţine numărul 2012. Să se determine toate numerele naturale cu această proprietate.*

Soluţie. Evident, numerele căutate au patru cifre, iar cifra miilor poate fi doar 1 sau 2. Dacă $\overline{1abc} + 1 + a + b + c = 2012$, obţinem că $101a + 11b + 2c = 1011$; cum $11b+2c \leq 117$, rezultă că $a = 9$, apoi $b = 8, c = 7$, deci numărul 1987 verifică cerinţele problemei. Dacă $\overline{2abc} + 2 + a + b + c = 2012$, atunci $101a + 11b + 2c = 10$, de unde $a = b = 0$, $c = 5$, obţinând astfel numărul 2005 ca a doua soluţie a problemei.

2. *În sistemul zecimal, cifrele x şi y şi numărul natural n satisfac egalitatea*

$$\overline{xy} + \overline{yx} = 1 + 2 + ... + n.$$

Să se determine toate valorile lui n şi toate numerele $\overline{xy}$ care satisfac această egalitate.

Soluţie. Egalitatea din enunţ revine la $2 \cdot 11(x + y) = n(n + 1)$, unde $x + y \in \{2, 3, \ldots, 18\}$. Din $n(n + 1) \leq 2 \cdot 11 \cdot 18$ obţinem că $n \leq 19$. Deoarece numărul prim 11 divide $n(n + 1)$, avem doar două posibilităţi: $n = 10$ sau $n = 11$. Dacă $n = 10$, atunci $x + y = 5$, prin urmare $\overline{xy} \in \{14, 23, 32, 41\}$. Dacă $n = 11$, atunci $x + y = 6$, deci $\overline{xy} \in \{15, 24, 33, 42, 51\}$.

3. *Să se determine 15 numere naturale nenule cu proprietatea că produsul succesorilor lor este de 2012 ori mai mare decât produsul lor.*

Soluţie. Vom găsi efectiv 15 numere $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$ cu proprietatea că $(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots (x_{15} + 1) = 2012 \cdot x_1 x_2 \ldots x_{15}$. Cum $2012 = 2^2 \cdot 503$, produsul din stânga trebuie să se dividă cu 503; pentru aceasta, luăm $x_{15} = 502$. Atunci produsul din dreapta se va divide cu 251, ceea ce conduce la alegerea $x_{14} = 250$. Egalitatea iniţială revine astfel la

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots (x_{13} + 1) = 2^4 \cdot 5^3 \cdot x_1 x_2 \ldots x_{13}.$$

Considerăm $x_{13} = x_{12} = x_{11} = 4$ şi suntem conduşi la

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots (x_{10} + 1) = 2^{10} \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_{10}.$$

Numerele naturale nenule $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 1$ satisfac ultima relaţie. Prin urmare există 15 numere naturale cu proprietatea dorită, anume $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1$, $4, 4, 4$, $250, 502$. Bineînţeles, sunt posibile şi alte exemple.

4. *Pe tablă sunt scrise numerele $1, 2, 3, ..., 33$. Un elev efectuează următoarea operaţie: alege două numere astfel încât unul din ele să fie multiplu al celuilalt şi apoi le înlocuieşte cu câtul lor. Elevul repetă operaţia până când niciun număr de pe* *tablă nu este multiplu al altuia. Să se determine numărul minim de numere care pot rămâne pe tablă.*

Soluţie. Produsul tuturor numerelor aflate iniţial pe tablă este $P = 33! = 2^{31} \cdot 3^{15} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^3 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$. Efectuarea unei operaţi nu schimbă paritatea exponenţilor din descompuneea în factori primi a produsului numerelor aflate pe tablă: alegând numerele x şi y, cu $y = x \cdot a$, în locul lor va apărea pe tablă numărul a; astfel produsul $x \cdot y = x^2 \cdot a$ se înlocuieşte cu a, paritatea exponenţilor rămânând aceeaşi. Rezultă că produsul numerelor aflate în final pe tablă va conţine factorii $2, 3, 5, 11, 17, 19, 23, 29, 31$.

Dorim ca, la sfârşit, pe tablă să rămână cât mai puţine numere. În acest scop, factorii de mai sus ar trebui grupaţi astfel încât să nu depăşim 33; observăm că nu vom putea avea mai puţin de şapte numere.

Vom demonstra că numărul minim căutat este 7. Succesiunea de operaţii: $(16, 32) \to 2$; $(15, 30) \to 2$; $(14, 28) \to 2$; $(13, 26) \to 2$; $(12, 24) \to 2$; $(11, 22) \to 2$; $(9, 27) \to 3$; $(7, 21) \to (3)$; $(6, 18) \to 3$; $(5, 25) \to 5$; $(4, 20) \to 5$; $(2, 8) \to 4$; $(5, 5) \to 1$; $(2, 4) \to 2$; $(3, 3) \to 1$; $(3, 3) \to 1$; $(2, 2) \to 1$; $(2, 2) \to 1$; $(2, 2) \to 1$ lasă pe tablă numerele $17, 19, 23, 29, 31, 10, 33$ şi şapte de 1. În următorii şapte paşi eliminăm numerele de 1, astfel încât în final vor rămâne pe tablă şapte numere.

Clasa a VII-a

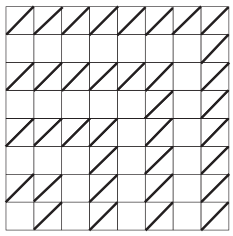
1. *Să se determine toate perechile (m, n) de numere întregi care satisfac ecuaţia*

$$(m + n) \cdot (m + n + 2) = 23 \cdot 3^{|m-n|} + 1.$$

Soluţie. Relaţia din enunţ revine la $(m+n+1)^2 = 23 \cdot 3^{|m-n|} + 2$. Cum nu există pătrate perfecte de forma $M_3 + 2$, rezultă că $|m - n| = 0$, deci $m = n$. Obţinem că $(2m + 1)^2 = 25$, de unde $m \in \{-3, 2\}$ şi atunci $(m, n) \in \{(-3, -3); (2, 2)\}$.

2. *Un pătrat de 8×8 este divizat în 64 pătrăţele de 1×1. Care este numărul maxim de diagonale care pot fi duse în pătrăţelele 1×1 astfel încât oricare două diagonale să nu aibă puncte comune?*

Soluţie. În figura alăturată sunt trasate 36 de diagonale, oricare două fără puncte comune. Vom demonstra că 36 este numărul maxim căutat. Fie 37 de diagonale duse în pătrăţelele 1×1. Împărţim pătratul 8×8 în patru dreptunghiuri 8×2; din principiul cutiei, există un astfel de dreptunghi care conţine măcar 10 diagonale. Fiecare dintre ele are un capăt pe axa de simetrie de lungime 8 a dreptunghiului, care nu conţine însă decât nouă noduri. Rezultă că două dintre cele 10 diagonale vor avea un capăt comun, ceea ce încheie soluţia problemei.



3. *Fie p un număr prim. Printre numerele naturale n de forma*

$$n = (p^2 + 32)^2 - 69 \cdot (p^2 + 32) + 2250,$$

să se determine numărul cu cea mai mică sumă a cifrelor lui.

Soluţie. Observăm că $n = p^4 - 5p^2 + 1066 = (p^2-4)(p^2-1) + 1062 = (p-2)(p-1)(p+1)(p+2) + 1062$. Dacă $p \neq 3$, atunci numerele $(p-2)(p-1), (p+1)(p+2)$ şi 1062 se divid cu 9, prin urmare n este multiplu de 9. Suma cifrelor lui n va fi, de asemenea, multiplu de 9, deci va fi cel puţin egală cu 9. Dacă $p = 3$, atunci $n = 1102$, număr care are suma cifrelor 4. În concluzie, numărul n care are suma cifrelor minimă este 1102.

4. *Numerele a, b, c sunt elemente ale mulţimii $\{1, 2, ..., 2012\}$. Să se determine numărul tuturor tripletelor ordonate diferite (a, b, c) cu proprietatea că suma $a+b+c$ este un multiplu al fiecărui din numerele a, b, c. (Două triplete formate din aceleaşi trei numere sunt triplete ordonate diferite dacă ordinea numerelor în aceste triplete este diferită.)*

Soluţie. Fie, pentru început, $a \leq b \leq c$. Cum $c | a+b+c$ şi $0 < a+b \leq 2c$, rezultă că $a + b \in \{c, 2c\}$.

I. Dacă $a + b = c$, atunci numărul $2c = a + b + c$ este multiplu al lui a şi al lui b, prin urmare $2c = am$, $2c = an$, cu $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$. Obţinem că $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, cu $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$, deci $\frac{1}{2} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n}$, adică $n \leq 4$. Prin verificări directe, pentru $n = 4$ găsim tripletele $(k, k, 2k)$, $1 \leq k \leq 1006$, iar pentru $n = 3$ găsim tripletele $(k, 2k, 3k)$, $1 \leq k \leq 670$.

II. Dacă $a+b = 2c$, atunci $a = b = c$, deci tripletele (k, k, k), $k \in k \in \{1, 2, \ldots, 2012\}$, verifică cerinţele problemei.

În total, ţinând seama şi de posibilele permutări în cadrul unui triplet, obţinem $3 \cdot 1006 + 6 \cdot 670 + 2012 = 9050$ tripletele ca în enunţ.

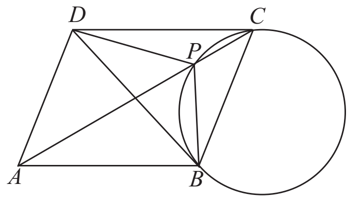
Clasa a IX-a

1. *Să se determine cel mai mic număr natural nenul n astfel încât numerele $14n$, $16n$, $18n$, $20n$ să aibă acelaşi număr de divizori.*

Soluţie. Cel mai mic număr n cu proprietatea din enunţ va avea în descompunerea sa în factori primi doar divizori primi ai numerelor $14, 16, 18$ sau 20, deci va fi de forma $n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$. Notând cu $d(x)$ numărul divizorilor naturali ai lui x, vom avea: $d(14n) = (a+2)(b+1)(c+1)(d+2)$; $d(16n) = (a+5)(b+1)(c+1)(d+1)$; $d(18n) = (a+2)(b+3)(c+1)(d+1)$; $d(20n) = (a+3)(b+1)(c+2)(d+1)$. Egalând două câte două aceste numere, obţinem că $a - 1 = 3d$, $2a + 1 = 3b$, respectiv $a + 1 = 2c$. Cea mai mică valoare a lui a pentru care a, b, c, d sunt numere naturale este $a = 1$, când $b = c = 1$, $d = 0$. În concluzie, $n = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^0 = 30$ este cel mai mic număr cu proprietăţile din enunţ.

2. *Fie paralelogramul $ABCD$ cu unghiul $\widehat{ABC}$ obtuz. Punctul P interior triunghiului BDC este situat pe diagonala (AC) astfel încât $m(\angle BPD) = m(\angle ABC)$. Să se demonstreze că dreapta CD este tangentă la cercul circumscris triunghiului BCP dacă şi numai dacă $AB = BD$.*

Soluţie. Întrucât $m(\widehat{A}) + m(\widehat{BPD}) = m(\widehat{A}) + m(\widehat{B}) = 180°$, patrulaterul (convex)



$ABPD$ este inscriptibil, prin urmare $\widehat{DBP} \equiv \widehat{DAP} \equiv \widehat{BCP}$. Cum dreapta BP separă punctele C şi D, avem: dreapta CD este tangentă cercului $(BCP) \Leftrightarrow \widehat{PCD} \equiv \widehat{PBC} \Leftrightarrow m(\widehat{PCD}) + m(\widehat{PCB}) = m(\widehat{PBC}) + m(\widehat{PBD}) \Leftrightarrow \widehat{DCB} \equiv \widehat{DBC} \Leftrightarrow DC = DB \Leftrightarrow AB = BD$.

3. *Să se determine toate perechile* (a, b) *de numere naturale care satisfac ecuaţia* $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

Soluţie. Dacă $a \geq 7$, se arată prin inducţie că $2^{a+1} > 4a^2 + 3$ şi atunci $4^a + 4a^2 + 4 < 4^a + 2^{a+1} + 1 = (2^a + 1)^2$. Evident că $4^a + 4a^2 + 4 > (2^a)^2$, $\forall a \geq 7$ şi, cum între două pătrate perfecte consecutive nu se mai găsesc alte pătrate perfecte, rezultă că ecuaţia din enunţ nu are soluţii (a, b) cu $a \geq 7$. Efectuând verificări directe pentru $a \in \{0, 1, \ldots, 6\}$, obţinem soluţiile $(a, b) \in \{(2, 6); (4, 18)\}$.

4. *Fie numerele reale*

$$A = \sqrt{10 + \sqrt{1}} + \sqrt{10 + \sqrt{2}} + ... + \sqrt{10 + \sqrt{99}},$$
$$B = \sqrt{10 - \sqrt{1}} + \sqrt{10 - \sqrt{2}} + ... + \sqrt{10 - \sqrt{99}}.$$

Să se arate că numărul $\dfrac{A}{B} - \sqrt{2}$ *este natural.*

Soluţie. Are loc identitatea

$$\sqrt{20 + 2\sqrt{n}} = \sqrt{10 + \sqrt{100 - n}} + \sqrt{10 - \sqrt{100 - n}},\ \forall n \in \{1, 2, \ldots, 99\}.$$

Dând lui n valorile $1, 2, \ldots, 99$, adunând membru cu membru egalităţile obţinute şi observând că suma din membrul stâng este chiar $A\sqrt{2}$, obţinem că $A\sqrt{2} = A + B \Leftrightarrow A(\sqrt{2} - 1) = B \Leftrightarrow \dfrac{A}{B} - \sqrt{2} = 1 \in \mathbb{N}$.

Clasa a XII-a

1. *Toate elementele mulţimii*

$$A = \{p, 3p + 2, 5p + 4, 7p + 6, 9p + 8, 11p + 10\}$$

sunt numere prime. Să se arate că numărul $17p + 2012$ *este compus.*

Soluţie. Dacă $p = 5$, atunci $11p + 10 = 65$, număr compus. Dacă $p \equiv 1 (\text{mod}\, 5)$, atunci $3p + 2 \equiv 0$ (mod 5), deci $3p + 2$ este compus. Dacă $p \equiv 2$ (mod 5), atunci $7p + 6 \equiv 0$ (mod 5), deci $7p + 6$ este compus. Dacă $p \equiv 3$ (mod 5), atunci $9p + 8 \equiv 0$ (mod 5), deci $9p + 8$ este compus. Rămâne că $p \equiv 4$ (mod 5) şi atunci $17p + 2012 \equiv 0$ (mod 5), aşadar $17p + 2012$ este număr compus.

Notă. Pentru $p = 2099$, cele şase numere din enunţ sunt toate prime, deci problema are obiect.

2. *Mulţimea nevidă* A *conţine* m *numere naturale pare nenule, iar mulţimea nevidă* B *conţine* n *numere naturale impare astfel încât suma elementelor din ambele mulţimi este egală cu 2012. Să se afle cea mai mare valoare posibilă a sumei* $3m + 4n$.

Soluţie. Fie S_m suma elementelor lui A şi S_n suma elementelor lui B; atunci $S_m \geq 2+4+\ldots+2m = m(m+1)$, iar $S_n \geq 1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$. Cum $S_m+S_n = 2012$, obţinem că $m(m+1)+n^2 \leq 2012$, de unde $(y-3m)^2 \leq 16(2012-m(m-1))$, unde am notat $y = 3m+4n$. Deducem astfel că $25m^2 - 2(3y-8)m + y^2 - 32192 \leq 0$, unde $y \in \mathbb{N}$, $y \geq 7$. Impunem condiţia $\Delta \geq 0$ şi rezultă că $y^2 + 3y - 50304 \leq 0$, deci $y \leq 222$. Pentru a dovedi faptul că $y_{\max} = 222$, este suficient să observăm că, dacă $A = \{2, 4, \ldots, 48, 50, 62\}$ şi $B = \{1, 3, \ldots, 67, 69, 75\}$, atunci $m = 26$, $n = 36$, $S_m + S_n = 712 + 1300 = 2012$, iar $3m + 4n = 222$.

3. *Să se calculeze integrala Riemann a funcţiei*

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x \cdot \frac{\cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{(1+\sin x)\,(1+\cos x)}}.$$

Soluţie. Întrucât $[(1+\sin x)(1+\cos x)]' = \cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, notaţia $g(x) = \sqrt{(1+\sin x)(1+\cos x)}$, $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, transformă integrala de calculat $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ în

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot g'(x)dx = 2\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x g(x)dx.$$

Din identitatea $(1+\cos x+\sin x)^2 = 2(1+\sin x)(1+\cos x)$ rezultă că $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + \cos x + \sin x)$, prin urmare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x g(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(1+\sin x+\cos x)dx = \frac{1}{\sqrt{2}}e^x(1+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}).$$

Înlocuind în I, obţinem în final că $I = -\sqrt{2}$.

4. *Şirul de numere întregi pozitive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisface condiţiile: a_n este un multiplu al lui n şi $|a_n - a_{n+1}| \leq 5$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine cea mai mare valoare posibilă a lui a_1.*

Soluţie. Din $-5 \leq a_n - a_{n+1} \leq 5$, rezultă că $a_{n+1} \leq a_n + 5$ de unde, din aproape în aproape, obţinem că $a_n \leq a_1 + 5(n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pentru valori suficient de mari ale lui n (de exemplu, $n > a_1 - 5$), găsim că $a_n < 6n$ şi de aici, deoarece a_n este multiplu de n, avem că $a_n \leq 5n$ (pentru n suficient de mare).

Astfel, există un număr finit de valori ale lui n pentru care $a_n > 5n$; fie k cel mai mare număr cu această proprietate, deci $a_k > 5k$ şi $a_{k+1} \leq 5(k+1)$. Cum a_k este multiplu al lui k, avem că $a_k \geq 6k$, deci $5 \geq a_k - a_{k+1} \geq 6k - 5(k+1) = k - 5$, aşadar $k \leq 10$.

În concluzie, $a_n \leq 5n$, $\forall n \geq 11$; în particular, $a_{11} \leq 55$. Întrucât a_n este multiplu al lui n care nu depăşeşte numărul $a_{n+1} + 5$, obţinem recursiv: $a_{10} \leq 60$, $a_9 \leq 63$, $a_8 \leq 64$, $a_7 \leq 63$, $a_6 \leq 66$, $a_5 \leq 70$, $a_4 \leq 72$, $a_3 \leq 75$, $a_2 \leq 80$, $a_1 \leq 85$. Şirul definit prin $a_1 = 85$, $a_2 = 80$, $a_3 = 75$, $a_4 = 72$, $a_5 = 70$, $a_6 = 66$, $a_7 = 63$, $a_8 = 64$, $a_9 = 63$, $a_{10} = 60$, $a_n = 5n$, $\forall n \geq 11$, are proprietăţile din enunţ, prin urmare cea mai mare valoare posibilă a lui a_1 este 85.