Autour du cardinal d'un ensemble de matrices binaires

Adrien REISNER[1]

Abstract. We here study a couple of algebraic and analytic properties of certain binary matrices in the spaces $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. In particular, we study power series whose coefficients are functions of the cardinal of these matrices, as well the rank of this family of matrices.

Keywords: binary bistochastic matrices, rank, power series.

MSC 2000: 15A03, 15A18.

On considère l'ensemble U_n des matrices binaires de taille n comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et exactement deux 1 dans chaque colonne (pour toute matrice $A \in U_n$ la matrice $\dfrac{1}{2}A$ est *bistochastique*). On désigne par $u_n = \operatorname{Card} U_n$ et on pose $u_0 = 1$, $u_1 = 0$. J_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exemples. Pour $n = 2$, la seule matrice de U_2 est la matrice $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc u_2=1. Pour n=3, U_3 est formé des 6 matrices $A_j, j : 1, \ldots, 6$ (suivant la position du seul élément nul $(a_{1i})_{i:1,2,3}$ de la première ligne): $(a_{11} = 0) : A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $(a_{12} = 0) : A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $(a_{13} = 0)$: $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc $u_3 = 6$.

1. Étude de u_n. On désigne par H_n le sous-ensemble de U_n comportant un 1 en position $(1, 1)$ et $h_n = \operatorname{Card} H_n$. En outre, K_n est le sous-ensemble de H_n comportant un 1 en position $(1, 2)$ et un 1 en position $(2, 1)$ et $k_n = \operatorname{Card} K_n$. $X_0 = [1]$ désignant le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 on a le

Théorème 1. *a) Pour toute matrice $A \in U_n$, 2 est valeur propre de A et X_0 est un vecteur propre associé à cette valeur propre. b) On a:* $\sum\limits_{A \in U_n} A = h_n J_n$.

Démonstration. a) Pour toute matrice $A \in U_n$ il est immédiat que le vecteur X_0 est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ (la matrice $\dfrac{1}{2}A$ est bistochastique): $AX_0 = 2X_0$, $\forall A \in U_n$.

[1]TELECOM ParisTech; e-mail: *Adrien.Reisner@telecom-paristech.fr*

b) Pour (i, j) fixé soit $(U_n)_{ij}$ l'ensemble $(U_n)_{ij} = \{A \in U_n; a_{ij} = 1\}$ et pour toute matrice A de U_n désignons par A' la matrice obtenue à partir de la matrice A en échangeant les lignes 1 et i puis les colonnes 1 et j. Il est immédiat que cette matrice A' appartient à l'ensemble H_n et que l'application $(U_n)_{ij} \to H_n$, $A \mapsto A'$ est *bijective.* Par suite pour tout $i, j : 1, \ldots, n$: $\mathrm{Card}(U_n)_{ij} = \mathrm{Card}\, H_n = h_n$, d'où l'assertion b).

Corollaire. *On a* $u_n = \dfrac{n}{2} h_n$.

Démonstration. Compte tenu des deux assertions précédentes il vient: $\sum\limits_{A \in U_n} AX_0 = h_n J_n X_0$ soit $2u_n X_0 = nh_n X_0$ et le corollaire est ainsi démontré, le vecteur X_0 étant vecteur propre de la matrice J_n pour la valeur propre n.

Théorème 2. *On a: a)* $h_n = (n-1)^2 k_n, n \geq 2$; *b)* $k_n = u_{n-2} + h_{n-1}$ *pour* $n \geq 4$.

Démonstration. a) Pour tout $(i, j), 2 \leq i,\ j \leq n$, soit H_n^{ij} l'ensembles des éléments de H_n ayant un 1 dans la position $(i, 1)$ et un 1 en position $(1, j)$. Ces ensembles H_n^{ij}, $2 \leq i,\ j \leq n$, constituent une *partition* de H_n et il y a $(n-1)^2$ de tels ensembles. Remarquons que $H_n^{22} = K_n$. De plus, l'application $\varphi_{i,j} : H_n^{ij} \to K_n$, $A \mapsto A_{ij}$, où la matrice A_{ij} est obtenue à partir de la matrice A par échange des lignes 2 et i et des colonnes 2 et j (lorsque $i = 2$ ou $j = 2$ on ne fait pas d'échange) est de façon évidente *bijective,* soit pour tout (i, j), $2 \leq i,\ j \leq n$, $\mathrm{Card}\, H_n^{ij} = \mathrm{Card}\, K_n = k_n$. On en déduit alors pour $n \geq 2$: $h_n = \mathrm{Card}\, H_n = \sum\limits_{i,j=2}^{n} \mathrm{Card}\, H_n^{ij} = \sum\limits_{i,j=2}^{n} \mathrm{Card}\, K_n = (n-1)^2 k_n$.

b) Pour $n \geq 4$, K_n est *réunion disjointe* des deux parties suivantes: 1) K_{n1} ensemble des éléments de K_n ayant un 1 dans la position $(2, 2)$. L'application de K_{n1} dans U_{n-2} qui à chaque matrice A fait associer la matrice obtenue à partir de A en supprimant les deux premières lignes et les deux premières colonnes est manifestement *bijective*; donc: $\mathrm{Card}\, K_{n1} = \mathrm{Card}\, U_{n-2} = u_{n-2}$. 2) K_{n2} ensemble des éléments de K_n ayant un 0 dans la position $(2, 2)$. Dans ce cas on considère l'application de K_{n2} dans H_{n-1} qui à chaque matrice A fait associer la matrice obtenue de celle-ci en remplaçant le 0 de la position $(2, 2)$ par 1 puis en supprimant la première ligne et la première colonne. On définit ainsi une application bijective. Il vient alors: $\mathrm{Card}\, K_{n2} = \mathrm{Card}\, H_{n-1} = h_{n-1}$. Finalement, pour $n \geq 4$ on a: $k_n = \mathrm{Card}\, K_n = \mathrm{Card}\, K_{n1} + \mathrm{Card}\, K_{n2} = u_{n-2} + h_{n-1}$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{u_n}{(n!)^2}$.

Théorème 3. *a)* w_n *vérifie la relation de récurrence* $w_n = \dfrac{1}{2n} w_{n-2} + \dfrac{n-1}{n} w_{n-1}$, $n \geq 2$, *avec* $w_0 = 1$ *et* $w_1 = 0$.

b) $w_n \in [0, 1]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

c) La série de terme général w_n *diverge.*

d) La série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ *converge pour* $x \in]-1, 1[$.

Démonstration. a) Pour $n \geq 4$ il vient, compte tenu du théorème précédent et du corollaire:

$$u_n = \frac{n}{2}h_n = \frac{n}{2}(n-1)^2(u_{n-2} + h_{n-1}) = \frac{n}{2}(n-1)^2 u_{n-2} + n(n-1)u_{n-1}.$$

A l′aide des conventions $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ cette relation est encore vérifiée pour $n = 2$ et $n = 3$. On a alors pour $n \geq 2$: $w_n = \frac{u_n}{(n!)^2} = \frac{1}{2n}w_{n-2} + \frac{n-1}{n}w_{n-1}$.

b) Pour tout $n, u_n \geq 0$, donc $w_n \geq 0$. Montrons par récurrence que $w_n \leq 1$, $n \in N$. D′abord, $w_0 = 1 \leq 1$ et $w_1 = 0 \leq 1$. Soit $n \geq 2$ et supposons que $w_{n-2} \leq 1$ et $w_{n-1} \leq 1$; alors, compte tenu de l′assertion précédente: $w_n = \frac{1}{2n}w_{n-2} + \frac{n-1}{n}w_{n-1} \leq \frac{1}{2n} + \frac{n-1}{n} = \frac{2n-1}{2n} \leq 1$.

c) Il est clair que $w_n > 0$, $\forall n \geq 2$. Compte tenu de l′assertion a), il vient: $w_n \geq \frac{n-1}{n}w_{n-1}$ et par suite: $w_n \geq \frac{2}{n}w_2 = \frac{1}{2n}u_2 = \frac{1}{2n}$, pour $n \geq 3$. Ceci montre que la série $\sum w_n$ diverge.

d) $0 \leq w_n \leq 1$ (voir b)) implique $|w_n x^n| \leq |x^n|$. La série géométrique x_n étant convergente pour $-1 < x < 1$, on déduit que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ est absolument convergente, donc convergente pour $|x| < 1$.

Théorème 4. *Pour* $x \in]-1, 1[$ *on a:* $W(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n x^n = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}$.

Démonstration. Soit $x \in]-1, 1[$. D′après l′assertion a) du Théorème 3,

$$2nw_n = 2(n-1)w_{n-1} + w_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par x^{n-1}, puis en sommant, on obtient alors:

$$2\sum_{n=2}^{\infty} nw_n x^{n-1} = 2x\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)w_{n-1}x^{n-2} + x\sum_{n=2}^{\infty} w_{n-2}x^{n-2}.$$

Il vient: $2(W'(x) - w_1) = 2xW'(x) + xW(x)$ soit puisque $w_1 = u_1 = 0$:

$$W'(x) = \frac{x}{2(1-x)}W(x), \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

D′ici et du fait que $W(0) = 1$, on obtient alors

$$W(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x}}{\sqrt{1-x}}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Remarque. Une étude plus approfondie permet de trouver, en utilisant la fonction Γ ainsi que la formule de Stirling, un équivalent de u_n lorsque $n \to \infty$, à savoir: $u_n \sim 2\left(\frac{n}{e}\right)^{2n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}$, mais cette étude dépasse le niveau de cet article.

2. Étude de rang. On se propose dans cette partie de déterminer le rang r_n du système constitué des u_n, matrices de U_n considérées comme éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposition. *Avec ces notations on a* : $r_2 = 1$ *et* $r_3 = 5$.

Démonstration. Pour $n = 2$, U_2 contenant la seule matrice non nulle J_2 : $r_2 = 1$. Pour $n = 3$, U_3 contient les 6 matrices A_i, $i : 1, \dots, 6$, trouvées page 124. Désignons par $\mathcal{J}$ le sous - espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par ces 6 matrices. D'après l'assertion b) du Théorème 1, la matrice J_3 appartient $\mathcal{J}$ et par suite $\mathcal{J}$ est aussi engendré par les 6 matrices $J - A_i$, $i : 1, \dots, 6$. Ces 6 matrices sont dans l'ordre: $J - A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J - A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J - A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J - A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J - A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J - A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soient λ_i, $i : 1, \dots, 6$, des réels donnés. Alors $\sum\limits_{i=1}^{6} \lambda_i (J - A_i) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_5 + \lambda_6 \\ \lambda_4 + \lambda_6 & \lambda_2 + \lambda_5 & \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_3 + \lambda_5 & \lambda_1 + \lambda_6 & \lambda_2 + \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -\lambda_6$. On en déduit $r_3 = 5$.

Soit V_n l'espace vectoriel des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $X_0 = [1]$ soit à la fois vecteur propre de A et de sa transposée ${}^tA$. [V_n est effectivement un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $0 \in V_n$ et si $(\alpha, \beta) \in R^2$ et $(A, B) \in (V_n)^2$ alors: $(\alpha A + \beta B)X_0 \in \mathrm{Vect}(X_0)$ et $(\alpha^t A + \beta^t B)X_0 \in \mathrm{Vect}(X_0)$.]

Théorème 5. $U_n \subset V_n$. *Pour* $A \in V_n$ *si* $AX_0 = \lambda X_0$, *alors* ${}^tAX_0 = \lambda X_0$.

Démonstration. Si $A \in U_n$, sa transposée ${}^tA$ appartient aussi à U_n. Comme X_0 est vecteur propre de toute matrice de U_n on a: $U_n \subset V_n$.

Soit alors $A = (a_{ij}) \in V_n$, λ la valeur propre de A associée au vecteur propre X_0, i.e. $AX_0 = \lambda X_0$ et μ celle de la transposée ${}^tA$ associée à X_0 : ${}^tAX_0 = \mu X_0$. Pour tout $i, j : 1, \dots, n$, on a: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} = \lambda$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} = \mu$. Par suite: $n\lambda = \sum\limits_{i=1}^{n} (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}) = \sum\limits_{j=1}^{n} (\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}) = n\mu$ soit $\lambda = \mu$.

Théorème 6. *a) dim* $V_n = (n-1)^2 + 1$*; b)* $r_n \leq (n-1)^2 + 1$.

Démonstration. a) On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$ la *base canonique* de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{n}} X_0$. On complète la famille orthonormée (e'_1) en une base *orthonormée* $\mathcal{B}_1 = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}_1$ et pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Compte tenu du théorème 5:

$$A \in V_n \Leftrightarrow \exists \lambda \in P / Ae'_1 = {}^tAe'_1 = \lambda e'_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in P, \exists A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) / Mat(f, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in P,\ \exists A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R}) / A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Il vient alors, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{dim} V_n = \mathrm{dim}\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} ; \lambda \in \mathbb{R}, A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})\} = 1 + (n-1)^2.$$

b) On en déduit puisque $U_n \subset V_n : r_n = \mathrm{dim}(\mathrm{Vect}(U_n)) \leq \mathrm{dim} V_n = (n-1)^2 + 1$.

Pour $n \geq 3$ soit $A = (a_{ij})$ une matrice de U_n comportant des 1 en positions $(1,1)$ et $(2,2)$ et des 0 en positions $(1,2)$ et $(2,1)$. La matrice $B = (b_{ij})$ définie par $b_{ij} = a_{ij}$ si $i > 2$ ou $j > 2$, $b_{ij} = 1 - a_{ij}$ si $i \leq 2$ et $j \leq 2$ est une matrice binaire ayant les mêmes lignes et les mêmes colonnes que A à partir de la troisième ligne ou colonne. La définition des éléments $(1,1), (2,2), (1,2)$ et $(2,1)$ de cette matrice B montre alors que $B \in U_n$. Pour tout $i, j : 1, \ldots, n : a_{ij} - b_{ij} = 0$ si $i > 2$ ou $j > 2$; $a_{ij} - b_{ij} = 1$ si $i = j$, $i \leq 2$ et $j \leq 2$; $a_{ij} - b_{ij} = -1$ si $i \neq j$, $i \leq 2$ et $j \leq 2$. La matrice $A - B$ ne comporte donc que des éléments nuls sauf en positions (i,j) avec $i \leq 2$ et $j \leq 2$.

Soit r'_n le rang du système constitué de toutes les matrices $U - U'$ où $U, U' \in U_n$.

Théorème 7. *a)* $r'_n \geq (n-1)^2$*; b)* $r_n = n^2 - 2n + 2$.

Démonstration. a) Pour tout $i, j : 1, \ldots, n$ notons A_{ij} la matrice obtenue à partir de la matrice A par l'échange des lignes i et 2 et les colonnes j et 2 et par B_{ij} la matrice obtenue à partir de la matrice B par les mêmes échanges. Ces matrices A_{ij} et B_{ij} appartiennent à U_n. De plus, $A_{ij} - B_{ij}$ est une matrice à coefficients nuls sauf en positions $(1,1)$, (i,j), $(1,j)$ et $(i,1)$ et telle que l'élément de la position (i,j) est 1. On remarque que par suppression de la première ligne et de la première colonne de $A_{ij} - B_{ij}$ on obtient la matrice $E_{i-1,j-1}$ de la base canonique de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. La famille $\{A_{ij} - B_{ij}\}_{i,j:2,\ldots,n}$ est donc *libre*, et par suite: $r'_n \geq (n-1)^2$.

b) D'après l'assertion b) du Théorème 6 et de l'assertion a) précédente on a les inégalités suivantes: $(n-1)^2 \leq r'_n \leq r_n \leq (n-1)^2 + 1$. Montrons que l'inégalité $r'_n \leq r_n$ est *stricte*. En effet, pour tout $U, U' \in U_n$ on a $(U - U')X_0 = 0$. Or $J_n X_0 = nX_0$ et par suite la matrice J_n ne peut être combinaison linéaire des éléments $U - U'$ avec $U, U' \in U_n$, mais elle est combinaison linéaire des éléments de U_n (voir Théorème 1 b)). Donc on a l'inégalité stricte: $r'_n < r_n$.

On en déduit finalement l'égalité: $r_n = (n-1)^2 + 1$.