Cercul de matematică "Leonard Euler" organizat la Universitatea Humboldt, Berlin

Probleme pentru clasa a IX-a

Holger STEPHAN[1]

1. *a*) Rezolvaţi în $\mathbb{R}^2$ sistemul de ecuaţii: $x_1 + x_2 = 1$, $x_1^4 + x_2^4 = 97$.
b) Determinaţi soluţiile reale x ale ecuaţiei

$$\sqrt[4]{254 - x^2 - 3x} + \sqrt[4]{18 + x^2 + 3x} = 6.$$

2. Fie m produsul a două numere prime p şi q. Găsiţi toate numerele întregi al căror produs este de m ori mai mare ca suma lor.

3. Suma cuburilor primelor cinci numere naturale este un pătrat perfect: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$. Găsiţi alte exemple de acest fel.

4. Calculaţi m ştiind că suma primelor $2n$ cuburi care nu sunt divizibile cu 3 este egală cu triplul sumei primelor m numere naturale.

5. Calculaţi sumele:

a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{9k^2 - 3k - 20} = \frac{1}{-14} + \frac{1}{10} + \frac{1}{52} + \frac{1}{112} + \cdots + \frac{1}{9n^2 - 3n - 20},$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k}{k^4 + 4} = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} + \frac{12}{85} + \frac{4}{65} + \frac{20}{629} + \frac{6}{325} + \cdots + \frac{4n}{n^4 + 4}.$$

Soluţii

1. *a*) Mai general, vom rezolva sistemul

$$x_1 + x_2 = a, \quad x_1^4 + x_2^4 = b. \tag{1}$$

Fie (x_1, x_2) o soluţie a sistemului. Ştim că ecuaţia de gradul doi ce are ca rădăcini numerele x_1, x_2 este $x^2 + px + q = 0$ cu $p = -(x_1 + x_2)$ şi $q = x_1 x_2$. Ca urmare, $p = -a$, iar pentru a obţine q utilizăm identitatea

$$(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + x_2^4 + 4x_1x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 6x_1^2x_2^2\,,$$

din care rezultă că $a^4 = b + 4q\left(a^2 - 2q\right) + 6q^2$ sau $2q^2 - 4a^2q + a^4 - b^4 = 0$, adică $q_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(2a^2 \pm \sqrt{2a^4 + 2b}\right)$. Deci x_1 şi x_2 satisfac de asemenea ecuaţiile

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}\left(2a^2 + \sqrt{2a^4 + 2b}\right) = 0 \quad \text{şi} \quad x^2 - ax + \frac{1}{2}\left(2a^2 - \sqrt{2a^4 + 2b}\right) = 0,$$

prin urmare $x_{1,2,3,4} = \dfrac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{-3a^2 \pm 2\sqrt{2b + 2a^4}}\right)$. Unele dintre aceste rădăcini sunt complexe. Soluţiile reale (x_1, x_2) ale sistemului se obţin din

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{2\sqrt{2b + 2a^4} - 3a^2}\right), \quad x_2 = \frac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{2\sqrt{2b + 2a^4} - 3a^2}\right).$$

[1] Cercetător dr., Institutul Weierstrass, Berlin (e-mail: stephan@wias-berlin.de)

Pentru $a = 1$ şi $b = 97$, obţinem $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{2\sqrt{2 \cdot 97 + 2 \cdot 1^4} - 3 \cdot 1^2}\right) = \frac{1}{2}(1 \pm 5)$, $x_2 = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{2\sqrt{2 \cdot 97 + 2 \cdot 1^4} - 3 \cdot 1^2}\right) = \frac{1}{2}(1 \mp 5)$. Sistemul dat are două soluţii: $(3, -2)$ şi $(-2, 3)$.

b) Notând $y = x^2 + 3x + 18$, $a = 6$ şi $b = 272$, ecuaţia poate fi pusă sub forma

$$\sqrt[4]{b-y} + \sqrt[4]{y} = a.$$

Punem $x_1 = \sqrt[4]{b-y}$, $x_2 = \sqrt[4]{y}$ şi obţinem sistemul (1) de la punctul *a*). În consecinţă,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(6 \pm \sqrt{2\sqrt{2 \cdot 272 + 2 \cdot 6^4} - 3 \cdot 6^2}\right) = \frac{1}{2}(6 \pm 2) = 3 \pm 1, \quad x_2 = \frac{1}{2}(6 \mp 2) = 3 \mp 1.$$

Deci $x_2 = 2$ sau $x_2 = 4$, adică $y = 16$ sau $y = 256$, ceea ce conduce la $x \in \{-1, -2\}$, respectiv $x \in \{-17, 14\}$. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $\{-17, -2, -1, 14\}$.

2. Fie a şi b, $a \leq b$, cele două numere căutate . Ele îndeplinesc condiţia $m(a+b) = ab$ sau $pq(a+b) = ab$ sau, încă,

$$(a - pq)(b - pq) = p^2q^2.$$

Fie i şi j doi divizori ai lui p^2q^2 cu $ij = p^2q^2$. Descompunerea precedentă dă $a = i + pq$ şi $b = j + pq$, iar $a \leq b$ implică $i \leq j$. Numărul p^2q^2 are divizorii 1, p, q, pq, p^2q, qp^2, p^2q^2 şi cei corespunzători cu semnul minus. Testăm diferiţi i şi j şi obţinem tabelul de soluţii

i	j	$a = i + pq$	$b = j + pq$
1	p^2q^2	$1 + pq$	$pq(1 + pq)$
p	pq^2	$p(1 + q)$	$pq(1 + q)$
q	p^2q	$q(1 + p)$	$pq(1 + p)$
pq	pq	$2pq$	$2pq$
$-pq$	$-pq$	0	0
$-p^2q$	$-q$	$pq(1 - p)$	$q(p - 1)$
$-pq^2$	$-p$	$pq(1 - q)$	$p(q - 1)$
$-p^2q^2$	-1	$pq(1 - pq)$	$pq - 1$

3. Notăm numerele căutate prin $(n-2)^3, \ldots, (n+2)^3$. Observăm că

$$(n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 5n(n^2 + 6)$$

Dacă în membrul drept avem un pătrat perfect, atunci n poate avea factorii primi 2, 3 şi 5 doar în număr impar. Alţi factori primi trebuie să fie în număr par. În plus trebuie ca sau n să fie divizibil cu 5 sau $n^2 + 6$ să fie divizibil cu 5. Ultima condiţie înseamnă că n dă restul ± 2 la împărtirea cu 5. Exemple de numere satisfăcând la aceste cerinţe nu sunt numeroase şi sunt uşor de obţinut. Iată primele astfel de numere: 2, 3, 5, 8, 10, 15, 27, 30, 32, 40, 98, 120. Valorile corespunzătoare pentru $5n(n^2+6)$ sunt $100 = 10^2$, $225 = 15^2$, 775, 2800, 5300, 17325, $99225 = 315^2$, 135900, 164800, 321200, $4708900 = 2170^2$, $8643600 = 2904^2$. Aşadar, avem

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2,$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2,$$

$$25^3 + 26^3 + 27^3 + 28^3 + 29^3 = 315^2,$$

$$96^3+97^3+98^3+99^3+100^3=2170^2,$$
$$118^3+119^3+120^3+121^3+122^3=2904^2.$$

Rămâne deschisă problema dacă pot fi găsite o infinitate de exemple de acest fel.

4. Folosim formula cunoscută $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$. Notăm cu s suma primelor $2n$ cuburi nedivizibile cu 3. Urmează că

$$\begin{aligned} s &= 1^3+2^3+4^3+5^3+7^3+8^3+\cdots+(3n-2)^3+(3n-1)^3=\\ &=\left(1^3+2^3+3^3+...+(3n)^3\right)-\left(3^3+6^3+...+(3n)^3\right)=\\ &=\frac{(3n)^2(3n+1)^2}{4}-3^3\frac{n^2(n+1)^2}{4}=3\cdot\frac{3n^2(3n^2-1)}{2}. \end{aligned}$$

Deducem că $m=3n^2-1$.

5. *a*) Fracţia se descompune într-o diferenţă de două fracţii simple astfel:

$$\frac{9}{9k^2-3k-20}=\frac{1}{3k-5}-\frac{1}{3k+4},\quad k\in\mathbb{N}^*.$$

Aceste fracţii se vor anula succesiv, deoarece $3\,(k+3)-5=3k+4$. Obţinem, notând cu s_n suma căutată,

$$\begin{aligned} 9s_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-5}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k+4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k-5}-\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{3k-5}=\\ &=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{3k-5}-\sum_{k=n+1}^{n+3}\frac{1}{3k-5}=\frac{3}{4}-\frac{3(9n^2+6n-2)}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)} \end{aligned}$$

şi, prin urmare,

$$s_n=\frac{1}{12}-\frac{9n^2+6n-2}{3(3n-2)(3n+1)(3n+4)}=\frac{n(9n^2-6n-14)}{4(3n-2)(3n+1)(3n+4)}.$$

b) Ideea de calcul este aceeaşi; se foloseşte următoarea descompunere:

$$\frac{4k}{k^4+4}=\frac{4k}{(k^2-2k+2)(k^2+2k+2)}=\frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2+2k+2}$$

Şi aceste fracţii se vor anula succesiv, deoarece $k^2+2k+2=(k+2)^2-2(k+2)+2$. Prin urmare,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{k^4+4}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-2k+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)^2-2(k+2)+2}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-2k+2}-\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k^2-2k+2}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k^2-2k+2}-\sum_{k=n+1}^{n+2}\frac{1}{k^2-2k+2}=$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{n^2+2n+2}=\frac{3n^4+6n^3+5n^2+2n}{2(n^2+1)(n^2+2n+2)}.$$