# Sur la dimension du commutant d'un endomorphisme

*Adrien REISNER* [1]

**Abstract.** We study here the dimension of the commutant of a square matrix $A$ when this one has a particular shape. In complements we determine this dimension for all $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ using the Jordan decomposition of $M$.

**Keywords :** Commutant, Jordan matrices.

**MSC 2010 :** 15A27, 15A21.

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$. On désigne par $\mathbf{C(A)}$ **le commutant** de $\mathbf{A}$ i.e. l'ensemble défini par :

$$C(A) = \{\, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \quad AB = BA\,\}.$$

Soit $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{C})$ la matrice d'un endomorphisme cyclique $f$ i.e. un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{C}^n$ vérifiant :

$$(x, f(x), f^2(x)......f^{n-1}(x)) \textit{ est une base de } \mathbb{C}^n$$

Etant donné un endomorphisme $f$ cyclique son **polynôme minimal** $\mathbf{m_f}$ est de degré $n$.

**Théorème 1.** La dimension du commutant d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ cyclique est $n$.

**Démonstration.** $f$ étant un endomorphisme cyclique il existe un vecteur $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0)...f^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$ : $m(f)$ est le polynôme minimal de $x_0$ i.e. le polynôme de degré minimal tel que $m_f(x_0) = 0$. Soit alors l'ensemble $E_{x_0} = \{\, P(f)(x_0),\ P \in \mathbb{C}[X]\,\}$. L'application :

$$\Phi : \mathbb{C}[X] \to E_{x_0}\ , \qquad P \mapsto P(f)(x_0)$$

est linéaire et surjective. Par suite $E_{x_0}$ est isomorphe à :

$$\mathbb{C}[X]/Ker\Phi = \mathbb{C}[X]/m_f$$

d'où $dim(E_{x_0}) = d^o m_f = n$ soit $E_{x_0} = \mathbb{C}^n$.

Soit $g \in C(f)$. Comme $E_{x_0} = \mathbb{C}^n$ il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant l'égalité $g(x_0) = P(f)(x_0)$. Or pour tout $y = Q(f)(x_0) \in E_{x_0}$ :

$$g(y) = g \circ Q(f)(x_0) = Q(f) \circ g(x_0) = Q(f) \circ P(f)(x_0) =$$

$$= P(f) \circ Q(f)(x_0) = P(f(y)$$

1. Paris ; *adrien.reisner@yahoo.fr*

Les endomorphismes $g$ et $P(f)$ prennent donc la même valeur sur $E_{x_0}$. Or - voir ci-dessus - $E_{x_0} = \mathbb{C}^n$ donc $g = P(f)$. On vient de montrer l'inclusion $C(f) \subset \{ P(f)(x_0),\ P \in \mathbb{C}[X] \}$. L'inclusion réciproque étant évidente on a finalement l'égalité $C(f) = E_{x_0}$ et par suite : $dimC(f) = n$ c.q.f.d.

**Remarque.** Soit $A$ une matrice nilpotente d'indice $n$ i.e. telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$. C'est la matrice d'un **endomorphisme cyclique** et par conséquent : $dimC(A) = n$

Dans le cas général on a le théorème suivant :

**Théorème 2.** Pour *tout endomorphisme* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ on a l'inégalité $dimC(f) \geqslant n$.

**Démonstration.** Le corps $\mathbb{C}$ étant algébriquement clos l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice canoniquement associé à l'endomorphisme $f$. $C(A)$ - **commutant de A** - est l'espace des solutions du système linéaire $AX - XA = 0 \quad (1)$ d'inconnue $X$.

$A$ étant trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on la suppose, quitte à changer de base, **trigonalisée**. Cherchons alors les solutions $X = (X_{ij})$ de (1) triangulaires supérieures. Puisque $AX - XA$ est alors triangulaire supérieure, résoudre le système (1) équivaut à l'écriture de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ équations traduisant la nullité des coefficients de $AX - XA$. De celles-ci on peut **supprimer** celles correspondant aux termes diagonaux - qui sont trivialement vérifiées - (i.e. $a_{ii}X_{ii} - X_{ii}a_{ii} = 0$). On obtient ainsi un **système homogène** de $\dfrac{n(n-1)}{2}$ équations à $\dfrac{n(n+1)}{2}$ inconnues. Donc $C(A) = C(f)$ est de dimension supérieur à $n$ c.q.f.d.

L'égalité a lieu lorsque l'endomorphisme $f$ est cyclique - voir théorème 1.

Soit $P$ la matrice d'une **transposition**. Pour une telle matrice on a le théorème suivant :

**Théorème 3.** La dimension du commutant d'une matrice de transposition $P$ est : $dimC(P) = n^2 - 2n + 2$.

**Démonstration.** Sans perdre en généralité on peut considérer la transposition $(1,2)$. Considérons dans la base canonique $(e_1.....e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ la matrice $P_{(1,2)}$ de la transposition $(1,2)$ i.e.

$$P_{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0_{1,n-2} \\ 1 & 0 & 0_{1,n-2} \\ 0_{n-2,1} & 0_{n-2,1} & I_{n-2} \end{pmatrix}$$

Etant donnée alors la matrice $X = (x_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on a immédiatement en égalant les produits $P_{(1,2)}X$ et $XP_{(1,2)}$ : $x_{1,1} = x_{2,2}$ , $x_{1,2} = x_{2,1}$,

$$x_{i,1} = x_{i,2} \ pour\ i : 3.....n \quad et \quad x_{1,j} = x_{2,j} \ pour\ j : 3.....n$$

Par suite la dimension du commutant $C(P_{(1,2)})$ est : $(n-2)^2 + 2 + 2(n-2)$ soit :

$$\mathbf{dimC(P_{(1,2)}) = n^2 - 2n + 2} \qquad c.q.f.d.$$

Soit maintenant un endomorphisme $u$ de $\mathbb{C}^n$ **diagonalisable**. On a le théorème suivant :

**Théorème 4.** La dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable $u$ est :

$$dimC(u) = \sum_{\lambda \in Spu} (dimE_\lambda(u))^2$$

où $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id)$. De plus la **codimension** de $C(u)$ est paire.

**Démonstration.** L'endomorphisme u étant diagonalisable soit $(\lambda_1, \lambda_2 .....\lambda_k)$ ses valeurs propres **deux à deux distincts** : il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle :

$$Mat\ (\ u, \mathcal{B}\ ) = D = Diag(\lambda_1 id_{n_1}, .......\lambda_k id_{n_k})$$

où $n_i \in \mathbb{N}^*$. On a l'équivalence suivante :

$$v \in C_u \quad \Leftrightarrow \quad V = Mat\ (v, \mathcal{B}\ ) \in C_D$$

Mais si $V \in C_D$ alors tout sous-espace propre de D est stable par V ( - par v - ) : par suite : $V = Diag(V_1, .....V_k)$ où pour j : 1 .... k , $V_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})$. Réciproquement le produit par blocs montre que :

$$C_D = \{\ Diag(V_1, ..., V_k)\ \mid\ \forall j\ ,\ V_j \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{C})\ \}$$

On en déduit immédiatement :

$$dim\ C_u = \sum_{j=1}^{k} n_j^2 = \sum_{\lambda \in Spu} (dimE_\lambda(u))^2 \qquad c.q.f.d.$$

D'autre part : $n = dimE = \sum_{j=1}^{k} n_j$ et par suite :

$$codim\ C_u = n^2 - dim\ C_u = n^2 - \sum_{j=1}^{k} n_j^2 = 2 \prod_{i \neq j} n_i n_j \qquad c.q.f.d.$$

**Remarque.** On retrouve ainsi le résultat du théorème précédent. En effet $A$ étant la matrice d'une transposition, elle est **diagonalisable** et admet $-1$ comme valeur propre simple et 1 comme valeur propre de multiplicité $n-1$. Compte tenu du résultat précédent :

$$dim(C(A)) = 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$$

**Théorème 5.** Pour une matrice **A** diagonalisable, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) $C(A)$ est commutative.
ii) $dim(C(A)) = n$
iii) $Card(Sp(A)) = n$
iv) $C(A) = \{\, p(A)\ ;\ p \in \mathbb{C}[X]\, \}$

**Démonstration.** Avec le notations précédentes pour tout $B \in C(A)$, $B$ laisse stable les sous-espaces propres $E_1, E_2......E_r$ de $A$. Dans la base de diagonalisation de $A$ :

$$A\ est\ semblable\ \text{à}\ diag(\lambda_1 I_{n_1} .....\lambda_r I_{n_r})\ et$$

$$B \textit{ est semblable à } diag(B_1.....B_r) \text{ où } B_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C}).$$

i) $\Rightarrow$ iii ) $C(A)$ et commutative si et seulement si pour tout $i : 1....r$ les $\mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$ sont commutatives i.e. si $n_1 = 1 ......n_r = 1$. Cela nécessite $r = n$ car $n = \sum dim(E_i) = \sum n_i$

iii) $\Rightarrow$ ii) Si $r = n$ on a - puisque $n = \sum dim(E_i) = \sum n_i$ : $\forall i : 1....r$ , $n_i = 1$ d'où $dim(C(A)) = n$.

ii) $\Rightarrow$ i) Si on a :

$$n = n_1 + ..... + n_r = n_1^2 + ..... + n_r^2 = dim(C(A))$$

alors $n_1 = ..... = n_r = 1$ et $r = n$. Alors $C(A)$ est commutative.

iii) $\Rightarrow$ iv) La sous-algèbre $\{p(A)\ ,\ p \in \mathbb{C}[X]\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par $A$ est contenue dans le commutant $C(A)$ de $A$. Si iii) est vérifiée $A$ admet $n$ valeurs propres distinctes : $\lambda_1......\lambda_n$. Soit $B \in C(A)$. Dans la base de diagonalisation de $A$, $A$ est semblable à $diag(\lambda_1....\lambda_n)$ alors que $B$ est semblable à $diag(\mu_1....\mu_n)$. Le **polynôme d'interpolation de Lagrange** $p \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n - 1$ tel que $\mu_i = p(\lambda_i)$ pour $i : 1......n$ vérifie $B = p(A)$. Ainsi $C(A)$ est égale à la sous-algèbre $\{\,p(A)\ ,\ p \in \mathbb{C}[X]\,\}$

iv) $\Rightarrow$ i) est évident.

En supposant toujours $A$ diagonalisable soit l'ensemble - appelé bicommutant de $A$ - :

$$\mathbf{C^2(A) = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ,\ \forall\, B \in C(A)\ ,\quad BC = CB\ \}}$$

On a alors :

**Théorème 6.** Avec les notations précédentes :

$$C \in C^2(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, P \in \mathbb{C}[X] \mid C = P(A)$$

**Démonstration.** $\Leftarrow$ est évident car $BA = AB$ implique $BP(A) = P(A)B$.

$\Rightarrow$ Comme $A \in C(A)$ si $C \in C^2(A)$ on doit avoir en particulier l'égalité $CA = AC$. $Q$ étant la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ à la base de diagonalisation de $A$, on a :

$$Q^{-1}AQ = diag(\lambda_1 I_{n_1}......\lambda_r I_{n_r})\ , \quad Q^{-1}CQ = diag(C_1......C_r)$$

où $CB = BC$ pour tout $B \in C(A)$ . Soit $Q^{-1}BQ = diag(B_1......B_r)$. On en déduit $\forall\, i : 1....r : B_iC_i = C_iB_i$ pour tout $B_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{C})$. Par suite $C_i = \mu_i I_{n_i}$ pour tout $i : 1....r$ d'où :

$$C = diag(\mu_1 I_{n_1}.......\mu_r I_{n_r})$$

Les $\lambda_i$ étant distinctes pour $i : 1....r$ soit le **polynôme d'interpolation de Lagrange** $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que pour tout $i : 1....r$, $P(\lambda_i) = \mu_i$. Il vient alors : $Q^{-1}CQ = Q^{-1}P(A)Q$ soit $C = P(A)$.

**Compléments : calcul effectif de dimC(M) dans le cas général**

On a vu - théorème 2 - que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a l'inégalité $dimC(M) \geqslant n$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on se propose de démontrer ici le théorème suivant concernant le commutant $C(M)$ de la matrice $M$ :

**Théorème 7.** $C(M)$ est un sous - espace vectoriel. Les blocs de Jordan correspondant à la valeur propre $\lambda$ de la matrice $M$ étant d'ordre respectifs $\mu_1(\lambda) \geqslant \mu_2(\lambda) \geqslant ....... \geqslant \mu_r(\lambda)$ la dimension du **commutant** de M est égale à :

$$dim\ C(M) = \sum_{\lambda \in Sp\, M} \sum_{i,j} min\ (\ \mu_i(\lambda), \mu_j(\lambda)\ ) = \sum_{\lambda \in Sp\, M} \nu(\lambda)\ \ où\ :$$

$$\nu(\lambda) = \mu_1(\lambda) + 3\mu_2(\lambda) + ... + (2r-1)\mu_r(\lambda)$$

**Démonstration.** Soit $J_M = diag\ (\ J_1, J_2, .....J_k\ )$ la forme de Jordan de la matrice M : $M = PJ_MP^{-1}$. On a les équivalences suivantes :

Y commute avec $M \Leftrightarrow YM = MY \Leftrightarrow XJ_M = J_MX$ où $Y = PXP^{-1}$. Soit $X = [\ X_{i,j}\ ]_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ la décomposition de la matrice X en blocs - matrices correspondant aux tailles des $J_i$. On a : $XJ_M = J_MX \Leftrightarrow X_{i,j}J_j = J_iX_{i,j}$ (1) pour tout $i, j : 1...k$. Ce système d'équations conduit à :

• Si $Sp\ J_i \neq SpJ_j$ on a : $X_{i,j} = 0$

• Si $Sp\ J_i = SpJ_j$ - i.e. $J_i$ et $J_j$ correspondent à la même valeur propre $\lambda$ - avec $J_i = J_{\mu_u}(\lambda)$ et $J_j = J_{\mu_v}(\lambda)$ alors **toute solution** $X_{i,j}$ de (1) est de la forme $X_{i,j} = Z$, $X_{i,j} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$ si $u > v$ et $X_{i,j} = \begin{pmatrix} Z & 0 \end{pmatrix}$ si $u < v$ où Z est la matrice triangulaire supérieure de la forme : $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_t \\ 0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{t-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 \end{pmatrix}$. Or la dimension du sous - espace de telles matrices est $\mathbf{t} = \mathbf{min(u, v)}$. D'autre part pour toute valeur propre $\lambda$ si $\mu_1(\lambda) \geqslant \mu_2(\lambda) \geqslant ....... \geqslant \mu_r(\lambda)$ il vient :

$$\sum_{i,j} min\ (\ \mu_i(\lambda), \mu_j(\lambda)\ ) = \nu(\lambda) = \mu_1(\lambda) + 3\mu_2(\lambda) + ... + (2r-1)\mu_r(\lambda).$$

On retrouve ainsi les résultats précédents et en particulier le résultat de la remarque du théorème 1 puisque le bloc de Jordan $J_n$ est nilpotent d'indice $n$ : $dimC(J_n) = \nu(0) = min(n, n) = n$.

En utilisant ce théorème on démontre le corollaire suivant qui généralise la deuxième assertion du théorème 4 :

**Corollaire.** Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. **La codimension** du commutant de $M$ **est paire**.

**Démonstration du corollaire.** Compte tenu du théorème précédent on se propose de touver une autre expression de $dimC(M)$ :

$$\sum_{i,j} min\ (\ \mu_i(\lambda), \mu_j(\lambda)\ ) = \nu(\lambda) = \mu_1(\lambda) + 3\mu_2(\lambda) + ... + (2r-1)\mu_r(\lambda)$$

On peut écrire :

$$\nu(\lambda) = (\mu_1(\lambda) + \mu_2(\lambda) + ... + \mu_r(\lambda)) + 2\delta(\lambda) = \mu(\lambda) + 2\delta(\lambda) \quad où\ :$$

$$\mu(\lambda) = \sum_i \mu_i(\lambda)\ , \quad \delta(\lambda) = \mu_2(\lambda) + 2\mu_3(\lambda) + ...... + (r-1)\mu_r(\lambda)$$

Par conséquent il vient puisque $\sum_{\lambda \in Sp(M)} \mu(\lambda) = n$ :

$$dimC(M) = \sum_{\lambda \in Sp(M)} \nu(\lambda) = \sum_{\lambda \in Sp(M)} (\mu(\lambda) + 2\delta(\lambda)) =$$

$$= n - 2 \sum_{\lambda \in Sp(M)} \delta(\lambda)$$

Il en résulte :

$$codimC(M) = n^2 - dimC(M) = n^2 - n - 2 \sum_{\lambda \in Sp(M)} \delta(\lambda)$$

soit puisque $n^2 - n = n(n-1)$ est pair : **codimC(M) est paire**   c.q.f.d.

**Références**


**1. J.M. Arnaudiès, H. Fraysse** – *Cours d'algèbre*, t. 1, Dunod, Paris, 1987.
**2. M. Cognet** – *Algèbre linéaire*, Bréal, Paris, 2000.


---

# Recreații... matematice

(*Răspuns la recreaţia de la p. 24*)

Pentru $a = 4$ se obţine

$$A = \frac{4^4 + \overline{41}^2 + 77^0 + 79^1}{\overline{44} + \overline{412} + 770 + 791} = \frac{2017}{2017} = 1.$$

Ionel a primit nota 4.