CORESPONDENȚE

Un problème de la combinatoire des ensembles

Adrien REISNER[1]

Abstract. Let Ω be a set and $\mathcal{H}$ a set of Ω- subsets. We define the set $\pi_{\mathcal{H}}(S) = \{S \cap H,\ H \in \mathcal{H}\}$. We here study the *saturated sets* of Ω, i.e. such that $Card(\pi_{\mathcal{H}}(S)) = 2^{|S|}$, and we find an upper bound of $|\pi_{\mathcal{H}}(S)|$.

Keywords: cardinal number, set, saturated set.

MSC 2010: 97K20, 03E05.

Soit Ω un ensemble. $\mathcal{H}$ étant un ensemble de parties de Ω, on définit pour toute partie S de Ω l′ensemble

$$\pi_{\mathcal{H}}(S) = \{S \cap H,\ H \in \mathcal{H}\}.$$

On se propose dans cet article de trouver *un majorant de* $|\pi_{\mathcal{H}}(S)|$, où $|E|$ désigne le cardinal du sous-ensemble E. $\mathcal{P}(E)$ étant l′ensemble des parties de E, introduisons la définition suivante:

Définition. On dit qu′une partie S de Ω est *saturée,* lorsque on a:

$$\pi_{\mathcal{H}}(S) = \mathcal{P}(S).$$

On suppose que $d = \max\limits_{S\ saturée} |S|$ existe et est fini.

Quelques propriétés d′une partie saturée. La proposition suivante est presque évidente:

Proposition 1. *a) Pour toute partie saturée S_1 de Ω on a:*

$$\forall s \in \mathcal{P}(S_1),\ \exists H \in \mathcal{H},\ s \subset H.$$

En particulier, $\exists H \in \mathcal{H}$ tel que $S_1 \subset H$.

b) Tout sous-ensemble d′une partie saturée est encore saturée.

Démonstration. a) En effet, étant donné que $\pi_{\mathcal{H}}(S_1) = \mathcal{P}(S_1)$, on en déduit immédiatement l′assertion a).

b) Σ étant un sous-ensemble de S_1, on a : $\mathcal{P}(\Sigma) \subset \mathcal{P}(S_1)$, d'où on en déduit l′assertion b).

Remarque. En particulier, pour tout entier naturel $n \leq d$ il existe une partie saturée de cardinal n : il suffit de considérer un sous-ensemble de cardinal n d′une partie saturée de cardinal maximale d.

[1]TELECOM ParisTech; *adrien.reisner@yahoo.fr*

On désignera dans la suite par S_0 un sous-ensemble de Ω saturé de cardinal d.

Soit S un sous-ensemble quelconque de Ω. $\binom{|S|}{i}$ *étant le nombre de parties à* i *éléments de S*, il est clair que la maximum du cardinal de $\pi_{\mathcal{H}}(S)$ est un entier inférieur ou égal à $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$:

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| \leq \sum_{i=0}^{|S|} \binom{|S|}{i} = |\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}.$$

Distinguons deux cas suivant la position de l'entier $|S|$ par rapport à d.

Proposition 2. *Si* $|S| \leq d$*, on a:*

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i} = 2^{|S|},$$

avec égalité si et seulement si S *est saturée. En particulier,*

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S_0)| = 2^d.$$

Démonstration. Il est évident que le maximum du cardinal de $\pi_{\mathcal{H}}(S)$ est le cardinal de $\mathcal{P}(S)$ - *S est alors saturé* -, et que ce cas a lieu, par exemple, lorsque $S \subset S_0$ - voir remarque b) précédente. En effet, S étant saturé, dans ce cas on a:

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| = \sum_{i=0}^{|S|} \binom{|S|}{i} = \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i} = |\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|},$$

avec la convention $\binom{|S|}{i} = 0$ si $i > |S|$. La proposition est ainsi démontrée.

Proposition 3. *Pour tout sous-ensemble* S *de* Ω *tel que* $|S| \geq d$*, on a:*

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i}, \qquad (\bullet)$$

avec égalité si et seulement si S est une partie saturée de cardinal maximale d.

Démonstration. Afin d'établir l'inégalité $(\bullet)$ raisonnons par l'absurde. On se propose donc de démontrer que l'égalité :

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| = 1 + \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i} \text{ \textit{est impossible}}$$

et, par suite, l'inégalité stricte $|\pi_{\mathcal{H}}(S)| > \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i}$ est impossible.

En effet, si $|S| = d + 1$ alors, on aurait :

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| = 1 + \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i} = \binom{d+1}{d+1} + \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i} = \sum_{i=0}^{d+1} \binom{|S|}{i} = 2^{d+1}$$

et S serait une *partie saturée* de cardinal $d+1$ ce qui contredit la définition de d comme maximum du cardinal d'une partie saturée.

Supposons maintenant que S vérifie $|S| > d+1$ et $|\pi_{\mathcal{H}}(S)| = 1 + \sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i}$. La somme $\sum_{i=0}^{d} \binom{|S|}{i}$ est la somme des cardinaux *de tous les parties* à $0, 1, ..., d$ éléments de S. Or, pour tout sous-ensemble $S' \subset S$ de cardinal $d+1$, on a: $\mathcal{P}(S') \subset \mathcal{P}(S)$ et, par suite, en ne considérant que les éléments de S', il existe donc un ensemble S' de cardinal $d+1$ tel que $|\pi_{\mathcal{H}}(S')| = 1 + \sum_{i=0}^{d} \binom{|S'|}{i}$, ce qui *est impossible* compte tenu du cas précédemment étudié.

Les deux propositions précédentes permettent alors de conclure avec le corollaire suivant:

Corollaire. *Pour tout sous-ensemble S de Ω on a l'inégalité suivante:*

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| \leq \sum_{i=0}^{d} \binom{|\ S\ |}{i}$$

avec égalité si et seulement si S est une partie saturée de cardinal maximale d.

Application. Soit Ω un ensemble à n éléments et h un entier vérifiant $1 \leq h \leq n-1$. Considérons un élément $\omega_0 \in \Omega$ et l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{H \subset \Omega;\ 1 \leq |H| \leq h\ ,\ \omega_0 \in H\}.$$

On prouve que *les parties saturées* sont les sous-ensembles $H \setminus \{\omega_0\}$ avec $H \in \mathcal{H}$. En effet, si $H \in \mathcal{H}$, on voit facilement que $\pi_{\mathcal{H}}(H \setminus \{\omega_0\}) = \mathcal{P}(H \setminus \{\omega_0\})$. D'autre part, soit un sous-ensemble S tel que $|S| = h$ et $\omega_0 \notin S$. On constate que l'ensemble $\pi_{\mathcal{H}}(S)$ ne contient pas S lui-même et *donc S n'est pas saturé.*

On en déduit que les $H \setminus \{\omega_0\}$ où $H \in \mathcal{H}$ *et* $|H| = h$ sont des parties saturées *de cardinal maximal,* i.e. $d = \max\limits_{S\ saturée} |S| = h-1$. Le Corollaire montre alors que pour tout sous-ensemble S de Ω , on a:

$$|\pi_{\mathcal{H}}(S)| \leq \sum_{i=0}^{h-1} \binom{|S|}{i} = \sum_{i=1}^{h} \binom{|S|}{i-1}.$$

Dans le domaine des *graphes* on peut trouver d'autres applications du corollaire.

Bibliographie

1. **J.M. Arnaudiès, H. Fraysse** – *Cours d'algèbre,* t. 1, Dunod , Paris, 1987.
2. **N.L. Biggs** – *Discrete Mathematics,* Oxford Science Publications, 1986.
3. **J.H. van Lint, R.M. Wilson** – *A course in combinatorics,* Cambridge Univerity Press, 2001.
4. **L. Schwartz** – *Analyse I: Théorie des ensembles et topologie,* Hermann, Paris, 1991.