Images des bases orthonormées par des projecteurs

Adrien REISNER [1]

Abstract. Let a family $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ of n vectors and a basis $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ of $\mathbb{R}^n$. We find a projection P such that $P(e_i) = v_i, \forall i : 1, \ldots, n$.

Keywords: Basis, projector, orthogonal automorphism.

MSC 2010: 97H60.

Etant donné une famille $V = (v_1, \ldots, v_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le but de l'article c'est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base orthonormée $E = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et un projecteur P de $\mathbb{R}^n$ - i.e. vérifiant $P^2 = P$ - tel que $P(e_i) = v_i$ pour tout i. On désignera par S_V ce problème.

Cas particuliers. 1) V est une famille orthonormale de rang n de $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas la solution est unique $(E, P) = (V, \mathrm{id})$.

2) Supposons que $n = 2$ et que le rang de la famille V est 1: $V = \{v_1, \lambda v_1\}$ avec $v_1 \neq 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On se propose de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le problème S_V ait une solution.

Considérons une *base orthonormale* (i, j) de $\mathbb{R}^2$ telle que $v_1 = k \times i$ où $k = \| v_1 \|$ et cherchons $E = \{e_1, e_2\}$ avec $e_1 = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$ et $e_2 = \pm(-\sin\theta\, i + \cos\theta\, j)$. Le problème S_V admet une solution si et seulement si il existe P projecteur tel que $P(e_1) = \cos\theta\, P(i) + \sin\theta\, P(j) = v_1 = k \times i$ et $P(e_2) = \pm(-\sin\theta\, P(i) + \cos\theta\, P(j)) = \lambda v_1 = \lambda k \times i$, soit tel que $P(i) = f(\theta) \times i$ et $P(j) = g(\theta) \times i$ avec $f(\theta) = k(\cos\theta \pm \lambda \sin\theta)$ et $g(\theta) = k(\sin\theta \mp \lambda\cos\theta)$, soit si et seulement si la matrice de P dans la base (i, j) est $\begin{pmatrix} f(\theta) & g(\theta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or cette matrice est la matrice d'un projecteur de rang 1 si et seulement si ses valeurs propres sont 0 et 1, c'est à dire si et seulement si $f(\theta) = 1$. Par ailleurs, on sait que l'équation $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ où $(a, b) \neq (0, 0)$ admet (modulo 2π) 2 , 1 ou 0 solutions, selon que: $a^2 + b^2 > c^2$, $a^2 + b^2 = c^2$ ou $a^2 + b^2 < c^2$, respectivement . On en déduit que S_V a une solution si et seulement si $k^2(1 + \lambda^2) \geq 1$, c'est à dire, puisque $k = \| v_1 \|$ et $k\lambda = \| v_2 \|$, si et seulement si $\| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2 \geq 1$. Supposant cette inégalité vérifiée, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $a^2 = \| v_1 \|^2 + \| v_2 \|^2 - 1$, est la matrice dans la base (i, j) du projecteur P. Il n'y a pas d'unicité pour cette matrice P.

Théorème 1. *Etant donné un endomorphisme A de $\mathbb{R}^n$, on a les égalités suivantes:*

i) $\ker({}^tAA) = \ker A$,

[1] TELECOM ParisTech; *adrien.reisner@yahoo.fr*

ii) $\mathrm{Im}(A^tA) = \mathrm{Im}A$.

Démonstration. i) Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on a l'implication $AX = 0 \Rightarrow {}^tAAX = 0$, soit $\ker A \subset \ker({}^tAA)$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, si ${}^tAAX = 0$, alors ${}^tX{}^tAAX = 0$. Or $(U,V) \in (\mathbb{R}^n)^2 \to {}^tUV$ est *le produit scalaire* de $\mathbb{R}^n$, donc on a $AX = 0$. Ainsi $\ker({}^tAA) \subset \ker A$, soit finalement $\ker A = \ker({}^tAA)$.

ii) On a clairement $\mathrm{Im}\,(A\,{}^tA) \subset \mathrm{Im}\,(A)$. Or l'égalité précédente appliquée à ${}^tA$ montre aussi, par la formule du rang, que $\mathrm{rg}(A^tA) = \mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}A$, donc, comme les deux espaces ont la même dimension, on a l'égalité $\mathrm{Im}(A^tA) = \mathrm{Im}A$.

Théorème 2. *Les deux endomorphismes ${}^tAA$ et A^tA ont les mêmes valeurs propres - considérés avec leurs multiplicités.*

Démonstration. Les matrices ${}^tAA$ et A^tA sont symétriques, donc *diagonalisables*, ainsi les multiplicités des valeurs propres sont égales aux dimensions des sous-espaces propres; il suffit donc de montrer qu'elles ont les mêmes valeurs propres et que les espaces propres sont de même dimension.

Du théorème précédent, il résulte que ${}^tAA$ et A^tA ont le même rang (celui de A): la propriété est donc vraie pour la valeur propre 0.

Soit λ une valeur propre non nulle de ${}^tAA$, de multiplicité m et d'espace propre associé E (on a : $\dim E = m$). Comme ${}^tAA$ est symétrique, E est orthogonal à $\ker({}^tAA) = \ker A$, et donc $A_{|\,E} : E \mapsto E' = A(E)$ est un isomorphisme. Par ailleurs, pour $V = AX \in E'$ avec $X \in E$, on a : $A^tAV = A(\lambda X) = \lambda V$. Donc, λ est valeur propre de A^tA, d'espace propre contenant E', donc de dimension supérieur à m : ainsi λ est valeur propre de A^tA de multiplicité supérieur à m . En échangeant A et ${}^tA$, on voit que les multiplicités sont *égales* et le Théorème 2 est ainsi démontré.

On désigne par A et B deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que : $A^tA = B^tB$. Compte tenu du Théorème 1, ii), les endomorphismes ${}^tA$, A^tA, B^tB et ${}^tB$ ont même rang et même noyau $N = \ker^t A$.

Théorème 3. *Il existe un endomorphisme O vérifiant: $A = BO$ et $O^tO = I_n$ - non unique - (i.e. O est un automorphisme orthogonal).*

Démonstration. Comme A^tA est symétrique, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ la diagonalisant. Posons $A^tAe_j = d_je_j$, avec $d_j \neq 0$ si $1 \leq j \leq r$ et $d_j = 0$ pour $j > r$. D'autre part, on a grâce à un calcul par blocs - en identifiant les e_j et les a_j à des vecteurs colonnes - : $(a_1.......a_n) = (e_1, \ldots, e_n)^tA$. Ainsi, δ_k^i désignant le symbole de Kronecker, l'égalité $A^tAe_j = d_je_j$ se traduit par

$$< a_k, a_l >= \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}a_{l,j} = \delta_k^l d_k.$$

En particulier, $\| a_j \|^2 = d_j$ si $j \leq r$ et $a_j = 0$ si $j > r$. Ainsi, en posant $u_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{d_i}}$ si $i \leq r$, on a un *système orthonormal* que l'on peut compléter en une base orthonormale $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_n\}$.

De la même façon, avec des notations évidentes, on obtient une base orthonormale $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ avec $v_i = \dfrac{b_i}{\sqrt{d_i}}$ si $i \leq r$ ($b_j = 0$ pour $j > r$). L'endomorphisme O défini par $O(u_j) = v_j$, pour tout $1 \leq j \leq n$, vérifie: $O(a_i) = b_i$, $1 \leq i \leq n$. On peut résumer ces égalités en un produit par blocs : $O(a_1 ...... a_n) = (b_1 ...... b_n)$ ce qui en transposant donne $A^t O = B$ soit, puisque O est orthogonale (O transfome une base orthonormale en une autre base orthonormale): $A = BO$.

Corollaire 4. *L'automorphisme O est unique si et seulement si B est inversible.*

Démonstration. Soit O_0 une solution de $A = BO_0$. U en est une autre solution si et seulement si $B(O_0 - O) = 0$, c'est à dire si et seulement si $\mathrm{Im}(O_0 - O) \subset \ker B$. Compte tenu de la démonstration du théorème précédent on voit qu'il n'y a pas unicité si $r > 0$. Par contre, il y a unicité si $r = 0$: la seule solution possible est alors $O = B^{-1}A$.

Soit $V = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour toute base orthonormée $E = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $A_{V,E}$ l'endomorphisme qui pour tout $i : 1, \ldots, n$ transforme e_i en v_i.

Théorème 5. *L'endomorphisme $(A_{V,E})^t A_{V,E}$ est indépendant de E.* (On le notera T_v.)

Démonstration. Soient E et E' deux bases orthonormales de $\mathbb{R}^n$ et O l'endomorphisme tel que $O(E) = E'$. On a $A_{V,E} = A_{V,E'}O$, et donc:

$$A_{V,E}\, {}^t A_{V,E} = (A_{V,E'}O)({}^t O A_{V,E'}) = A_{V,E'}\, {}^t A_{V,E'},$$

puisque $O^t A = I_n$ (O endomorphisme orthogonal).

Théorème 6. *S_V admet une solution si et seulement s'il existe un projecteur P vérifiant: $T_V = P\, {}^t P$.*

Démonstration. Si S_V a une solution (E, P), alors $A_{V,E} = P$, et donc P est idempotent (i.e. $P^2 = P$) tel que $P\, {}^t P = T_V$.

Réciproquement, si P est idempotent tel que $P\, {}^t P = T_V$, soit F une base orthonormale quelconque de $\mathbb{R}^n$. On a : $P\, {}^t P = A_{V,F}\, {}^t A_{V,F}$. Compte tenu du Théorème 4, il existe un automorphisme othogonal O tel que $P = A_{V,F}O$. Posons $E = O^{-1}(F)$; il vient alors:

$$O = A_{F,E} \;\; et \;\; P = A_{V,E}$$

et on voit que $(E = O^{-1}(F), P)$ est solution de S_V.

Théorème 7. *En suppoant que* $\dim\{v_1, \ldots, v_n\} = 1$, *une condition nécessaire et suffisante pour que le problème S_V admet une solution est que*

$$\sum_{k=1}^{n} \parallel v_k \parallel^2 \geq 1.$$

Démonstration. On suppose $v_1 \neq 0$ et pour $j : 1, \ldots, n$: $v_j = \lambda_j v_1$ avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Prenons pour F une base orthonormale telle que $f_1 = \dfrac{v_1}{\| v_1 \|}$. Dans ce cas

$$A_{V,F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \| v_1 \| & \lambda_2 \| v_1 \| & \ldots & \lambda_n \| v_1 \| \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit, en posant $T = (t_{i,j}) = A_{V,F}\ {}^tA_{V,F}$: tous les $t_{i,j}$ sont nuls sauf

$$t_{1,1} = \| v_1 \|^2 \sum_1^n \lambda_k^2 = \sum_1^n \| v_k \|^2 .$$

Premier cas. Si $t_{1,1} \geq 1$, on peut prendre:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

avec $a = \sqrt{t_{1,1} - 1}$; donc S_V a une solution, à savoir $(E = O^{-1}(F), P = A_{V,E})$, où O est *orthogonale*, telle que $P = A_{V,F}O$ - la matrice O n'est pas unique (voir Théorème 3 et son Corollaire 4).

Second cas: $t_{1,1} < 1$. Si P est un idempotent tel que $T = P^tP$, on aurait:

$$1 > t_{1,1} = \mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(P^tP) = \mathrm{tr}({}^tPP)$$

Or la trace d'un endomorphisme s'exprime par : $\mathrm{tr}(T) = \sum_{f \in F} < f, T(f) >$, pour une base orthonormale E ; donc on aurait :

$$1 > \sum_{f \in F} < f, T(f) > = \sum_{f \in F} < f, {}^tPP(f) > = \sum_{f \in F} \| P(f) \|^2,$$

d'où une contradiction en choisissant une base F contenant $f_1 = \dfrac{v_1}{\| v_1 \|}$.

Remarque. On retrouve le résultat du cas particulier 2) étudié au début de l'article - pour $n = 2$ et lorsque le rang de la famille V est 1.

Bibliographie

1. **J-M. Arnaudiès, H. Fraysse** – *Cours de mathématiques,* Tome 4, Dunod, Paris, 1990.
2. **M. Cognet** – *Algèbre bilinéaire,* Bréal, Paris, 2002.