Matrices compagnons – une étude élémentaire

Adrien REISNER [1]

Abstract. We study here the elementary properties of companion matrices: characteristic and minimal polynomial, eigenvalues and eigenvectors, diagonalisable matrices. Application: locating of polynomial roots.

Keywords: companion matrix, characteristic polynomial, eigenvalues, rational canonical form.

MSC 2010: 15A21.

Les matrices compagnons interviennent en particulier dans la *forme rationnelle canonique* de toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qui sera rappelée dans le complément de cet article. C'est un des intérêts de telles matrices.

Notations. Le polynôme caractéristique de toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera désigné par $\chi_A(X) = det(A - XI_n)$; $m_A(X)$ désignera le polynôme minimal de la matrice A, i.e. le polynôme normalisé de degré minimum vérifiant $m_A(A) = 0$, générateur de l'idéal principal $\{Q \in \mathbb{R}[X] \mid Q(A) = 0\}$. (Cet idéal est le noyau de l'homomorphisme $\mathbb{R}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \mapsto P(A)$.)

Si $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ est un polynôme normalisé de $\mathbb{R}[X]$, on lui associe la matrice suivante, appelée *matrice compagnon* du polynôme P:

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Théorème 1. *C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.*

Démonstration. En développant $det\,(C_P)$ suivant sa première ligne, on obtient:

$$det(C_P) = (-1)^{n+1}(-a_0) \times 1 = (-1)^n P(0),$$

d'où l'équivalence suivante: $C_P \in GL_n(\mathbb{R}) \iff P(0) \neq 0$.

Théorème 2. *Il existe une constante α telle que le polynôme caractéristique de C_P, $\chi_{C_P}(X)$, soit égal à αP.*

Démonstration. En développant $det\,(C_p - XI_n)$ suivant sa dernière colonne, on a:

$$\chi_{C_P} = det\,(C_p - XI_n) = (-a_{n-1} - X)(-X)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^{n+k+1}(-a_k)\Delta_k, \quad \text{où}$$

[1]TELECOM ParisTech; e-mail: *adrien.reisner@yahoo.fr*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -X & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -X & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

($(-X)$ étant écrit k fois). Il vient immédiatement $det\ (\Delta_k) = (-X)^k$ et par suite

$$\chi_{C_P} = (-1)^n \times (X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k a_k (-1)^k X^k) = (-1)^n P(X),$$

donc $\chi_{C_P}(X) = \alpha P$, d'où le Théorème 2 avec $\alpha = (-1)^n$.

Corollaire 3. *Etant donné un polynôme $P(X)$, les deux assertions suivantes sont équivalentes:*
i) Il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\chi_A = P$.
ii) P est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$.

Démonstration. Si le polynôme P vérifie l'assertion i) il est nécessaire que $\deg P = n$ et que son coefficient dominant soit $(-1)^n$. Le Théoreme 2 montre alors que cette condition est suffisante.

Théorème 4. *a) $Sp\ C_P = Sp\ {}^tC_P$.*
b) Le sous-espace propre de ${}^tC_P$ associé à la valeur propre λ est la droite vectorielle

$$Ker\ ({}^tC_P - \lambda I_n) = Vect\ (1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^{n-1}).$$

Démonstration. a) Les matrices C_P et ${}^tC_P$ ont même polynôme caractéristique et donc le même spectre.
b) Soit $\lambda \in Sp\,({}^tC_P)$ et $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} {}^tC_P X = \lambda X \quad &\Longleftrightarrow \forall k : 1...n-1,\ \ x_{k+1} = \lambda x_k \ \ et \ \ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} = \lambda x_n \\ &\Longleftrightarrow \forall k : 2...n,\ \ x_k = \lambda^{k-1} x_1 \ \ et \ \ -\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i x_1 = \lambda^n x_1 \\ &\Longleftrightarrow \forall k : 2...n,\ \ x_k = \lambda^{k-1} x_1 \ \ et \ \ (\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i) \times x_1 = P(\lambda) x_1 = 0, \end{aligned}$$

λ étant racine du polynôme P, d'où l'assertion b).

Corollaire 5. *La matrice ${}^tC_P$ (donc la matrice C_P) est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{R}$ et a toutes ses racines simples.*

Démonstration. La matrice ${}^tC_P$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_{{}^tC_P} = (-1)^n P$ est scindé sur $\mathbb{R}$ et pour toute valeur propre λ la dimension du sous-espace propre associé est l'ordre de multiplicité de cette valeur propre. Compte tenu de l'assertion b) du théorème précédent tout sous-espace propre de ${}^tC_P$ est de dimension 1, d'où le Corollaire 5.

Supposons que P admet les n racines simples $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ et soit $V = (v_{i,j})$, où $v_{i,j} = \lambda_j^{i-1}$. On retrouve le résultat bien connu suivant:

Corollaire 6. *La matrice de Vandermonde V est inversible.*

Démonstration. En effet, compte tenu de l'assertion b) du Théorème 4, pour $1 \leq j \leq n$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j de ${}^tC_P$ est engendré par le vecteur $e_j = (\lambda_j^{i-1})_{1 \leq i \leq n}$. Compte tenu du Corollaire 5, la matrice ${}^tC_P$ est diagonalisable. On en déduit que la famille $(e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}^n$ et par suite le déterminant de Vandermonde *det* $(\lambda_j^{i-1})_{1 \leq i,j \leq n}$ est non nul:

$$ {}^tC_P = V \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)\; V^{-1}. $$

Soit f un endomorphisme dn $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n vérifiant: $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$, i.e. f est *nilpotent* d'indice n. On a le théorème suivant:

Théorème 7. *Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est une matrice compagnon.*

Démonstration. Soit x_0 un vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$. Montrons que la famille $\{x_0, f(x_0), ..., f^{n-1}(x_0)\}$ est libre. Supposons par l'absurde que cette famille est liée. Alors il existe $(\lambda_0, ..., \lambda_{n-1}) \neq (0, 0, ..., 0)$ tel que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$. Soit $p = \min\{k \mid k : 0...n-1,\ \lambda_k \neq 0\}$. Par définition $0 \leq p \leq n-1$ et $\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0) = 0$. En considérant l'image des deux membres par f^{n-1-p} ($n-1-p$ est un entier positif), on obtient: $\sum_{k=p}^{n-1} \lambda_k f^{k+n-p-1}(x_0) = 0$, d'où $\lambda_p f^{n-1}(x_0) = 0$ - puisque pour $k \geq n$, $f^k(x_0) = 0$ -. Comme $f^{n-1}(x_0) \neq 0$, on obtient $\lambda_p = 0$ ce qui contredit la définition de l'entier p. Donc la famille $\{x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\}$ est libre et par suite c'est une base de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base la matrice de f est la matrice compagnon $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & & -a_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ du polynôme $P(X) = X^n$. (On a dans ce cas: $m_f(X) = P(X) = X^n$ et $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$.)

Afin de généraliser ce théorème, on propose l'exercice suivant:

Exercice. *Montrer que si l'endomorphisme f de E vérifie la condition $(-1)^n \chi_f(X) = m_f(X) = P$ (ou encore si deg $m_f = n$), alors il existe $v \in E$ non nul tel que la famille $\mathcal{B} = \{v, f(v), ..., f^{n-1}(v)\}$ soit une base de E.*

La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est alors la matrice C_P - voir le Corollaire 3. Dans ce cas f est un *endomorphisme cyclique* - voir [**1**], pages 437-447 -. Une matrice M commute avec C_P si et seulement si $M \in \mathbb{R}\,[C_P]$. Ainsi, en particulier, tout endomorphisme nilpotent d'indice n est cyclique.

Indications. Soit $m_f = \prod P_i^{d_i}$ la décomposition de m_f en produit de facteurs P_i irréductibles. Le théorème de décomposition des noyaux conduit à: $E = \bigoplus Ker P_i^{d_i}(f)$. Le vecteur $v = \sum v_i$ où $v_i \in Ker P_i^{d_i}(f)$ vérifie $v \neq 0$ et $m_f(v) = 0$. La famille $\{v, f(v), ..., f^{n-1}(v)\}$ est une base de E dans laquelle la matrice de f est C_P - voir démonstration du Théorème 7 -.

Théorème 8. *P étant un polynôme normalisé, les matrices C_P et ${}^tC_P$ sont semblables: $\exists M \in GL_n(R)$ telle que $M^{-1}C_P M = {}^tC_P$.*

Démonstration. En effet, la matrice $M = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,j} = a_{k-1}$ si $i + j = k \leq n$, $m_{i,j} = 1$ si $i + j = n + 1$ et enfin $m_{i,j} = 0$ si $i + j \geq n + 2$ s'écrit par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ (1) & 0 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$, où le bloc (1) est carré d'ordre 1 et M_2 est le bloc carré d'ordre $n - 1$. On a: $C_P\ M = M\ {}^tC_P = Diag\ ((-a_0), M_2)$.

Application: localisation des racines d'un polynôme.

Notations. Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $r_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \mid a_{i,j} \mid$ pour $i \leq n$, et $D_i = \{z \in \mathbb{C}, \mid z \mid \leq r_i\}$. Enfin, pour $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ posons $\parallel X \parallel_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n.} \mid x_i \mid$.

Théorème 9. *Avec ces notations on a: $Sp\ A \subset \cup D_k$, $1 \leq k \leq n$.*

Démonstration. Si $AX = \lambda X$, on obtient pour $1 \leq i \leq n$: $\lambda x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ et par suite: $\mid \lambda x_i \mid \leq \sum\limits_{j=1}^{n} \mid a_{i,j} \mid \times \mid x_j \mid \leq \parallel X \parallel_\infty \times (\sum\limits_{j=1}^{n} \mid a_{i,j} \mid) = r_i \times \parallel X \parallel_\infty$, $i : 1...n$. Soit i_0 un indice tel que $\parallel X \parallel_\infty = \mid x_{i_0} \mid$. $\mid \lambda \mid \times \parallel X \parallel_\infty = \mid \lambda x_{i_0} \mid \leq r_{i_0} \times \parallel X \parallel_\infty$ Le vecteur propre X étant non nul: $\mid \lambda \mid \leq r_{i_0}$ soit $\lambda \in D_{i_0}$, d'où le Théorème 9.

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. On a le corollaire suivant:

Corollaire 10. *Toutes les racines de P sont dans le disque fermé de centre O et de rayon $R = max\,\{\mid a_0 \mid, 1 + \mid a_1 \mid, ..., 1 + \mid a_{n-1} \mid\}$.*

Démonstration. Notons $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ les n racines (distinctes ou confondues) de P dans $\mathbb{C}$. D'après le Théorème 1, $(-1)^n P$ étant le polynôme caractéristique de la matrice C_P, on a: $Sp\,C_P = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Or pour la matrice C_P: $r_1 = \mid a_0 \mid$, et pour $2 \leq i \leq n$, $r_i = 1 + \mid a_{i-1} \mid$. Le corollaire 10 en résulte.

Remarque. On peut montrer - mais ceci dépasse le niveau du présent article - le théorème suivant:

Théorème 11. *Si U et V sont deux matrices inversibles vérifiant la relation $rg(U-V)=1$ et telles que les polynômes caractéristiques χ_U et χ_V soient premiers entre eux, alors il existe une matrice inversible P telle que:* $U = P^{-1}C_U P$ et $V = P^{-1}C_V P$, où C_U (resp. C_V) est la matrice compagnon du polynôme $(-1)^n\ \chi_U$ (resp. $(-1)^n \chi_V$).

Compléments: forme rationnelle canonique des matrices.
Le théorème suivant dont la démonstration dépasse encore le niveau de cet article, est extrémement important. Le lecteur intéressé trouvera une démonstration dans **[1],** ch.19, p. 449, dans **[2],** ch.14, §2, p. 557 ou dans **[3],** p. 218.

Théorème 12. *K étant un corps commutatif, toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à une matrice de la forme suivante - décomposition de Frobénius (matrice bloc - diagonaux):*

$$C_{P_1} \bigoplus C_{P_2} ... \bigoplus C_{P_s} = Diag\,(C_{P_1} ....C_{P_s}) = \begin{pmatrix} C_{P_1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & C_{P_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & C_{P_s} \end{pmatrix}$$

où les P_i sont des polynômes normalisés non constants de $K[X]$ déterminés de manière unique tels que $P_1 \mid P_2$ ...... $\mid P_s$. ($P_i \mid P_j$: P_i divise P_j.)

Les polynômes P_i sont les *facteurs invariants* de la matrice A - voir **[4]** -. En particulier, on a: $P_s = m_A$ et $\chi_A = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} P_i$. Ainsi, deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes facteurs invariants.

Ce théorème permet de démontrer une généralisation du Théorème 8:

Corollaire 13. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à sa transposée ${}^tA$.*

Démonstration. Soit $A = Diag(C_{P_i})$ la forme rationnelle canonique de la matrice A - voir Théorème 12 -. Pour tout indice i: 1...s désignons par M_i la matrice inversible introduite dans le Théorème 8 vérifinant: $M_i^{-1}C_{P_i}M_i = {}^tC_{P_i}$. La matrice inversible $M = Diag(M_i)$ est alors telle que:

$$M^{-1}AM = Diag(M_i^{-1})Diag(C_{P_i})Diag(M_i) = Diag(M_i^{-1}C_{P_i}M_i) =$$

$$= Diag\,({}^tC_{P_i}) = {}^tA.$$

Exercices résolus.
Les exercices suivants utilisent les notions précédentes et montrent l'importance de ces notions. Ici les facteurs invariants sont *évidents.*

Exercice 1. *Soient les trois matrices suivantes:*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 14 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 85 \\ 1 & 4 & -30 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\exists \alpha \in GL_3(R)$ *telle que* $B = \alpha^{-1} C \alpha$, *i.e.* B *et* C *sont semblables et que* $\nexists \beta \in GL_3(R)$ *telle que* $A = \beta^{-1} B \beta$, *i.e* A *et* B *ne sont pas semblables.*

$\chi_A = \chi_B = \chi_C = -(X-2)^2(X-3)$; $(A-2I)(A-3I) = 0$; $(B-2I)(B-3I) \neq 0$ et $(C-2I)(C-3I) \neq 0$; $m_A = (X-2)(X-3)$; $m_B = m_C = P = (X-2)^2(X-3)$. Les facteurs invariants de A sont $(X-2)$ et $(X-2)(X-3)$; B et C ont un seul facteur invariant, à savoir, l'*unique polynôme* $P = (X-2)^2(X-3)$. La matrice A est semblable à la matrice: $A' = C_{X-2} \bigoplus C_{(X-2)(X-3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Les matrices B et C sont semblables à la matrice $C_P = m_B = m_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, d'où l'existence de la matrice $\alpha \in GL_3(\mathbb{R})$ - transitivité -. Enfin les matrices B et C ne sont pas semblables à la matrice A - facteurs invariants distincts -.

Remarque. Les deux endomrphismes représentés par B et C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont cycliques. Ce n'est pas le cas de l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. *Trouver les matrices* $A \in \mathcal{M}_3(R)$ *telles que* $m_A(X) = (X-2)^2$.

Dans ce cas $\chi_A(X) = -(X-2)^3$ puisque les polynômes m_A et χ_A ont les mêmes racines. Les facteurs invariants de A sont: $X-2$ et $(X-2)^2$. La matrice A est donc semblable à la matrice $C_{X-2} \bigoplus C_{(X-2)^2}$ et par suite *toutes* les matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $m_A(X) = (X-2)^2$ sont de la forme suivante:

$$A = P^{-1}(C_{X-2} \bigoplus C_{X^2-4X+4})P = P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} P, \quad \textit{où} \quad P \in GL_3(\mathbb{R}).$$

Exercice 3. *Trouver les matrices* $A \in \mathcal{M}_4(R)$ *telles que* $m_A(X) = (X+1)^2$.

Comme précédemment, $\chi_A(X) = (X+1)^4$. Dans ce cas, il existe deux possibilités pour la suite des facteurs invariants - voir Théorème 12 -:

• Les facteurs invariants de A sont: $P_1 = (X+1)^2$, $P_2 = m_A = (X+1)^2$. La matrice A appartient à la classe de similitude $\mathcal{S}_1$ de la matrice A_1 suivante:

$$A_1 = C_{X^2+2X+1} \bigoplus C_{X^2+2X+1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

• Les facteurs invariants de A sont: $P_1 = P_2 = (X+1)$, $P_3 = m_A = (X+1)^2$. La matrice A appartient à la classe de similitude $\mathcal{S}_2$ de la matrice A_2 suivante:

$$A_2 = C_{X+1} \bigoplus C_{X+1} \bigoplus C_{X^2+2X+1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc, toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $m_A(X) = (X+1)^2$ appartiennent à l'une des classes de similitude $\mathcal{S}_1$ ou $\mathcal{S}_2$, i.e. A est de la forme:

$$A = P^{-1}SP \;\; où \;\; P \in GL_4(\mathbb{R}) \;\; et \;\; S \in \{A_1, A_2\}.$$

Exercice 4. *Montrer que toute matrice A nilpotente de $\mathcal{M}_3(R)$ est semblable à l'une des matrices suivantes - voir théorème 7 -:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Désignons par $\mathcal{A}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{A}$ est nilpotent d'indice i si $\mathcal{A}^i = 0$ et $\mathcal{A}^{i-1} \neq 0$.
• Si l'indice de nilpotence de A est 1 alors A est la matrice nulle.
• Le Théorème 7 montre que si A est d'indice de nilpotence 3, alors A est semblable à A_3.
• Supposons que l'indice de nilpotence de A soit 2, i.e. $A \neq 0$ et $A^2 = 0$. Dans ce cas: $m_A = X^2$ et $\chi_A = X^3$. D'après le Théorème, 12 la matrice A admet deux facteurs invariants, à savoir, X et X^2 et A est semblable à la matrice $C_X \bigoplus C_{X^2} = diag\,(C_X, C_{X^2}) = A_2$.

(Sans utiliser le Théorème 12 on retrouve le même résultat: $A^2 = 0$ entraîne $ImA \subset KerA$. $A \neq 0$ entraîne $KerA \neq \mathbb{R}^3$. Comme $dim\,ImA + dim\,KerA = 3$, on a nécessairement $dim\,ImA = 1$ et $dim\,KerA = 2$. Soit un vecteur non nul $v_1 \in KerA$, mais $v_1 \notin ImA$ et $v_2 \notin KerA$. Le vecteur $v_3 = Av_2$ appartient à $Im\,A$, donc à $Ker\,A$. La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ par rapport à laquelle la matrice de l'endomorphisme $\mathcal{A}$ est A_2.)

Je tiens à remercier mon ami Mr. *Moubinool Omarjee*, professeur de mathématiques, pour les suggestions sur le sujet traité ici.

Bibliographie

1. **H. Roudier** – *Algèbre linéaire*, édition Vuibert, 2008.
2. **S. Lang** – *Algebra*, third edition Addison-Wesley, 1993 ou sa traduction en français, édition Dunod, 2004 (Théorème 14.2.1, p. 570).
3. **I.D. Ion, N. Radu** – *Algebra,* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1991.
4. **A. Reisner** – *Classes d'équivalence dans $\mathcal{M}_{m,n}(A)$. Facteurs invariants*, Recreaţii matematice, nr. 2, XVI(2014), 122–126.