# Quadrangle harmonique et nombres complexes

**_Adrien REISNER_** [1]

**Abstract.** Let $A, B, M, M'$ in complex plane of complex affix $a, b, z, z'$. The quadrangle $ABMM'$ is harmonic when the complex cross ratio $(A, B, M, M') = -1$.

**Keywords:** harmonic quadrangle, complex cross ratio, cocyclic points.

**MSC 2010:** 51M04.

**1. Définition et quelques propriétés.** On considère dans le plan complexe les points $A, B$ et $M$ , images respectives des nombres complexes $a, b$ et $z$ . On suppose $a \neq b$ . Soit $z'$ vérifiant:

$$(*) \qquad \frac{z'-a}{z'-b} : \frac{z-a}{z-b} = -1$$

ce qui s'écrit aussi $(z', z, a, b) = -1$ . En utilisant séparément modules et arguments des différences figurant dans $(*)$ on obtient , le point $M'$ étant l'image de $z'$:

$$(1) \qquad \frac{AM'}{BM'} = \frac{AM}{BM},$$

$$(2) \qquad (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \pi + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{2\pi}$$

Si les points $A, B$ et $M$ sont alignés sur une droite $(D)$, alors le point $M'$ est le point de $(D)$ tel que $(A, B, M, M')$ soit une division harmonique.

Si les points $A, B$ et $M$ ne sont pas alignés alors le quadrangle $(A, B, M, M')$ est un *quadrangle harmonique*. Dans ce cas les égalités (1) et (2) montrent que $M'$ appartient à l'arc du cercle circonscrit au triangle $AMB$ , limité à $A$ et $B$ et ne contenant pas $M$ .

Soit le quadrangle harmonique $(A, B, M, M')$ et $H$ le milieu de $AB$, $K$ le milieu de $MM'$.

**Théorème 1.** *Si $Z$ et $Z'$ ont pour images les vecteurs $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HM'}$, on a la relation:*

$$ZZ' = \frac{(a-b)^2}{4}.$$

**Démonstration.** En effet l'affixe du point $H$ est $h = \frac{a+b}{2}$ et par suite:

$$Z = z - \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad Z' = z' - \frac{a+b}{2}$$

d'où la relation à démontrer compte tenu de $(*)$ .

[1] TELECOM ParisTech; e-mail: *adrien.reisner@yahoo.fr*

**Théorème 2.** *a) La droite $(AB)$ bissecte l′angle $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$.*
*b) On a la relation: $HM \times HM' = HA^2 = HB^2$.*
*c) $MM'$ bisecte l′angle $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$ .*
*d) On a la relation: $KA \times KB = KM^2 = KM'^2$.*

**Démonstration.** De l′égalité établie précédemment on en déduit:
a) pour les arguments:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{HM}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{HM'}) = 2(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{HA}) \quad (mod.\ 2\pi)$$

soit:

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2} \times ((\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{HM}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{HM'})) \quad (mod.\ \pi),$$

i.e. la droite $(AB)$ bissecte l′angle $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$ .
b) pour les modules:

$$| Z || Z' | = | \frac{a-b}{2} |^2 \quad soit\ : HM \times HM' = HA^2 = HB^2.$$

c) et d) La relation $(*)$ peut s′écrire:

$$\frac{a-z'}{a-z} : \frac{b-z'}{b-z} = -1$$

c′est la même relation que celle qui a été proposée avec échange de $z'$ en $a$ , $z$ en $b$, $a$ en $z'$ et $b$ en $z$ . Par suite $H$ et $K$se sont échangés d′où les propriétés c) et d) compte tenu de a) et b) .

**Remarque.** Les deux couples $(A, B)$ et $(M, M')$ y jouent évidemment le même rôle et dans chaque couple les deux points sont interchangeables . On a la relation d′harmonie:

$$2(ab + zz') = (a + b)(z + z').$$

**Théorème 3.** *On a l′égalité suivante: $KA + KB = HM + HM'$.*

**Démonstration.** En effet:

$$\begin{aligned}(HM + HM')^2 &= HM^2 + HM'^2 + 2HM \times HM' = \\ &= 2HK^2 + \frac{1}{2} \times MM'^2 + 2HM \times HM' = \\ &= 2HK^2 + 2KM^2 + 2HA^2 = 2HK^2 + 2KM^2 + \frac{1}{2}AB^2 = \\ &= 2KM^2 + KA^2 + KB^2 = 2KA \times KB + KA^2 + KB^2 = \\ &= (KA + KB)^2,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

**2. Quelques constructions.** 1) Construction du point $M\,'$lorsque $A, B$ et $M$ sont donn*é*s. - Voir fig. 1 - La droite $(MM\,')$ coupe la médiatrice de AB en $\omega$ et $(AB)$ en $P$. La droite $(AB)$ étant la bissectrice intérieure de l'angle des droites $(HM)$ et $(HM\,')$, la droite $(H\omega)$ est la bissectrice extérieure de cet angle. Par suite - propriété des deux bissectrices - le faisceau $(HM, HM\,', HB, H\omega)$ est harmonique et $(\omega, P, M, M\,')$ est une *division harmonique*: $\omega$ est, donc, le pôle de $(AB)$ pour le cercle $(\gamma)$. Les tangentes à $(\gamma)$ menées par $A$ et $B$ se coupent en $\omega$. Ayant construit ainsi ce point $\omega$, on en déduit la construction du point $M\,'$ lorsque le point $M$ est donné sur $(\gamma)$ : $M\,'$ est l'intersection du cercle $(\gamma)$ et de la droite $\omega M$.

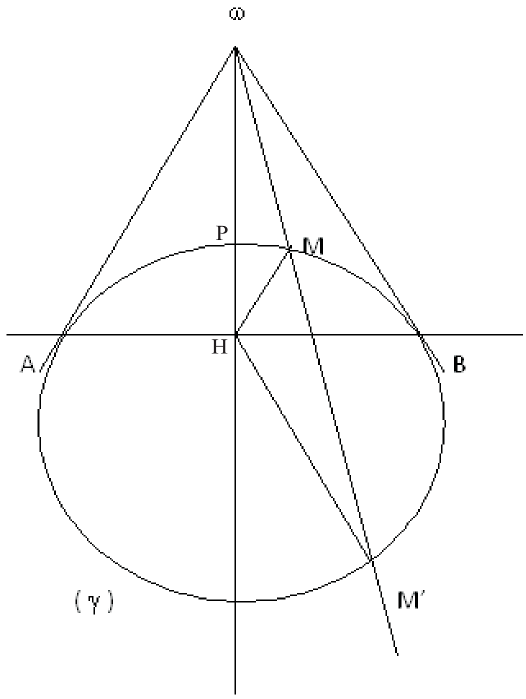

Fig. 1

**Remarque.** Etant donné un cercle $(\gamma)$ passant par $A$ et $B$, toute droite $(D)$ conjuguée avec $(AB)$ pour $(\gamma)$ ( i.e. le pôle $\omega$ de $(AB)$ par rapport au cercle appartient à $(D)$ et inversement ) coupe le cercle en $M$ et $M\,'$ telle que le quadrangle $(A, B, M, M\,')$ est harmonique - voir [**1**], XV-VI, page 402 -

*Cas particuliers*. Supposons que $AB$ est un *diamètre* du cercle $(\gamma)$. Le pôle de la droite $(AB)$ est le point à l'infini dans la direction perpendiculaire: toute droite $(MM\,')$ conjuguée de $(AB)$ est perpendiculaire à $(AB)$. On obtient un quadrangle harmonique particulier $(A, B, M, M\,')$ lorsque $AB$ est un diamètre de $(\gamma)$ et les deux points $M$ , $M\,'$ de $(\gamma)$ sont symétriques par rapport à $(AB)$. Tel est le cas d'un *carré* qui est donc un quadrangle harmonique - dans ce cas $AB$ et $MM\,'$ sont deux diamètres perpendiculaires du cercle $(\gamma)$-.

2) Construction des points $M$ et $M\,'$ lorsque $A, B$ et $K$ sont donnés - Voir fig. 2 - On suppose $A$ et $B$ fixes et $M$, $M\,'$ variables vérifant $(z', z, a, b) = -1$. Les résultats précédents montrent que lorsque le point $K$

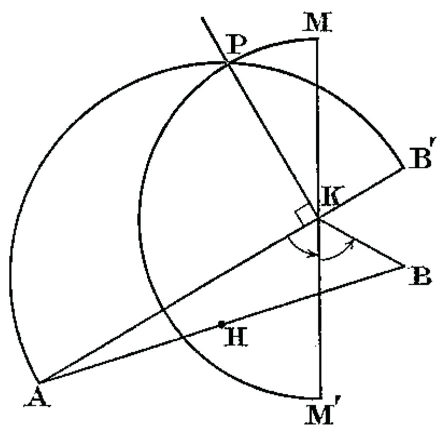

Fig. 2

(milieu de $MM'$) est donné on peut construire les points $M$ et $M'$ ainsi:

- soit $B'$ sur $AK$ tel que $KB' = KB$ ($K$ entre $A$ et $B'$);

- le cercle de diamètre $AB'$ coupe en $P$ la perpendiculaire à $AB'$ en $K$: $KP^2 = KA \times KB' = KA \times KB = KM^2$;

- $M$ et $M'$ sont sur la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$ et sur le cercle centré en $K$ passant par le point $P$ .

**3. Quelques lieux géométriques.** Compte tenu des résultats précédents on se propose de trouver les lieux géométriques des points $M'$ et $K$ lorsque le point $M$ décrit certaines droites ou cercles.

**Théorème 4.** *Lorsque $M$ décrit un cercle centré en $H$, $M'$ décrit un cercle centré en $H$. $K$ décrit une ellipse de foyers $A$ et $B$.*

**Démonstration.** En effet, lorsque $M$ décrit un cercle centré en $H$, $HM'$ est constant - compte tenu de la relation trouvée au Théorème 2 b ) - et $M'$ décrit un autre cercle centré en $H$. Il décrit tout ce cercle puisque les demi-droites $HM$et $HM'$ sont symétriques par rapport à $AB$ qui est fixe. Dans ce cas $KA + KB$ est constant avec $HM + HM'$ - voir Théorème 3 - et $K$ décrit l'ellipse de foyers $A$ et $B$.

**Théorème 5.** *Lorsque $M$ décrit une droite $(D)$ passant par $H$, $M'$ décrit la droite $(D')$ symétrique par rapport à $AB$ de la droite $(D)$. $K$ décrit une hyperbole $(H)$.*

**Démonstration.** Le point $M'$ décrit la droite $(D')$ symétrique par rapport à $AB$ de la droite $(D)$. Soit $Q$ le point défini par: $\overrightarrow{HQ} = \overrightarrow{HM} + \overrightarrow{HM'}$. La relation:

$$HM \times HM = HA'^2 = Cste$$

montre que $Q$ décrit l'hyperbole dont $(D)$ et $(D')$ sont les asymptotes. Le point $K$ - milieu de $HQ$ - décrit l'hyperbole $(\mathcal{H})$, homothétique de la précédente; elle est tangente en $K$ à $MM'$

**Théorème 6.** *Lorsque $M$ décrit un cercle $(\gamma)$ de centre $I$ passant par $A$ et $B$, alors $M'$ décrit ce même cercle $(\gamma)$. $K$ décrit l'arc $AIB$ du cercle de diamètre $I\omega$ où $\omega$ est le point d'intersection de $MM'$ et de la médiatrice de $AB$.*

**Démonstration.** En effet, compte tenu des propriétés même du quadrangle harmonique, lorsque $M$ décrit un cercle $(\gamma)$ passant par $A$ et $B$ il est immédiat que $M'$ décrit ce même cercle $(\gamma)$ - voir fig. 3 -. Les points $\omega$ et $P$ étant ceux de la fig. 1 - *construction du point* $\mathbf{M}'$ - on en déduit que le point $\omega$ est *fixe*. $I$ étant le centre de

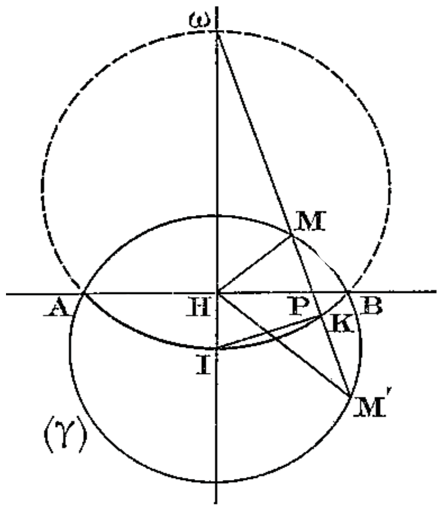

Fig. 3

$(\gamma)$, l'angle $(KI, K\omega)$ est droit: $K$ décrit l'arc $AI$B du cercle de diamètre $I\,\omega$ - $K$ milieu de $MM'$ est intérieur à $(\gamma)$ -.

**Théorème 7.** *Lorsque $M$ décrit un cercle de centre $I$ du faisceau dont $A$ et $B$ sont les points limites, $M'$ décrit ce même cercle et $K$ décrit un cercle passant par $I$.*

**Démonstration.** Supposant que $M$ décrit un cercle $(\gamma)$ du faisceau dont $A$ et $B$ sont les points limites - voir fig. 4 -, soit $M_1$ le symétrique de $M$ par rapport à $AB$. Ce point $M_1$ décrit ce même cercle $(\gamma)$. Alors les points $H$ , $M_1$ et $M'$ sont alignés. La relation:

$$\overline{HM_1} \times \overline{HM'} =$$
$$= HM_1 \times HM' =$$
$$= HM \times HM' = HA^2$$

montre que le point $M'$ décrit le même cercle $(\gamma)$. $MM'$ coupe en $\omega$ la droite $AB$: $\omega$ est le pied de la polaire de $H$ pour le cercle $(\gamma)$. Par suite, ce point $\omega$ est fixe. L'angle $(KI, K\omega)$ est droit et, par conséquent, $K$ décrit le cercle de diamètre $I\,\omega$: il le décrit en entier.

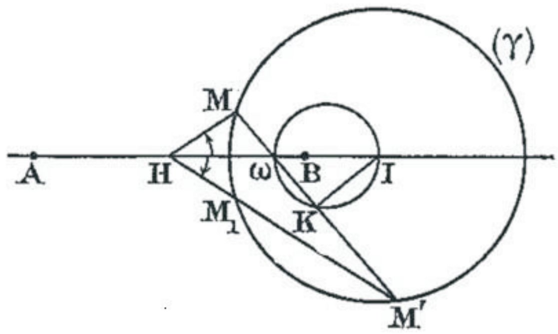


Fig. 4

Le point $M'$ décrivant le même cercle $(\gamma)$ que $M$, on en déduit immédiatement:

**Corollaire 8**. *Etant donné un cercle $(C)$ passant par $A$ et $B$, soit $(\gamma)$ un cercle du faisceau ayant $A$ et $B$ pour points limites. Ces deux cercles $(C)$ et $(\gamma)$ sont orthogonaux et se coupent en $M$ et $M'$. Le quadrangle de sommets $A$, $B$, $M$, $M'$ est harmonique.*

**Références**


1. **G. Cagnac, E. Ramis, J. Commeau** – *Nouveau Cours de Mathématiques Speciales*, Tome 3 - Géométrie,- G - éditions Masson, Paris, 1965.


## Recreații ... matematice

*Elevul:* – Doamnă învăţătoare, poate fi pedepsit cineva pentru un lucru pe care nu l-a făcut?
*Învăţătoarea:* – Nu, desigur!
*Învăţătoarea*: – Caietele pe masă! să văd tema pentru acasă...
*Elevul:* – Nu mi-am făcut tema, dar nu mă puteţi pedepsi...
*Învăţătoarea*: – Cum...?!!