Maximum of a function

Nicolae ANGHEL[1]

Abstract. In this note we present a generalization of a certain Putnam problem.
Keywords: continuous function, integral, maximum value.
MSC 2010: 26A06.

In 1991 the Putnam Examination [**P**] presented the following

Problem. Find the maximum value of the function

$$\int_0^y \sqrt{x^4 + (y - y^2)^2}\, dx, \quad 0 \le y \le 1. \tag{9}$$

Being a continuous function on a closed interval, $[0, 1]$, one may think of using traditional Calculus methods for solving the Problem. Namely, one may attempt an analysis of the function′s critical and end-point values, with or without a preliminary shot at actually evaluating the integral (9).

Soon however, one realizes the futility of an approach as above, so there must be some non-standard way of dealing with this Problem. We present here such a way, in the form of the following

Generalization. *For $a > 0$ consider two continuous functions f and g on $[0, a]$ such that*

(i) $f \ge 0, g \ge 0$ *on* $[0, a]$, $g(a) = 0$, *and g is differentiable on* $(0, a)$.
(ii) $f(x) + g(x) + xg'(x) \ge 0$ *for* $0 < x < a$.

Find the maximum value of the function

$$\int_0^y \sqrt{f^2(x) + g^2(y)}\, dx \quad \text{for} \quad 0 \le y \le a.$$

Notice first that indeed the Generalization generalizes the Problem. By setting $a = 1$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x - x^2$ in the Generalization, we get the Problem. Since in this case $f(x) + g(x) + xg'(x) = 2(x - x^2)$, the hypotheses (i) and (ii) are obviously all satisfied on $[0, 1]$.

We proceed now to solve the Generalization. Define $F : [0, a] \longrightarrow [0, \infty)$ by

$$F(y) = \int_0^y \sqrt{f^2(x) + g^2(y)}\, dx, \ 0 \le y \le a.$$

Clearly F is continuous on $[0, a]$, so it attains a maximum value there. We want to show that $F(y) \le F(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\, dx$, so $\displaystyle\int_0^a f(x)\, dx$ will be the answer to the Generalization. We have, for x, y in $[0, a]$,

$$\sqrt{f^2(x) + g^2(y)} \le f(x) + g(y),$$

[1]Department of Mathematics, University of North Texas, Denton; email: *angel@unt.edu*

which implies

$$F(y) \leq \int_0^y (f(x) + g(y))\,dx = \int_0^y f(x)\,dx + yg(y) =: G(y), \tag{10}$$

Now, G is differentiable on $(0, a)$ with derivative $G'(y) = f(y) + g(y) + yg'(y) \geq 0$, according to (ii). Thus G is non-decreasing on [0, a], and so

$$G(y) \leq G(a) = \int_0^a f(x)\,dx = F(a). \tag{11}$$

The claim follows now from (10) and (11).

We conclude that the maximum value of the function in the Problem is

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}.$$

References

1.**W. L. Putnam** – *Competition*, Website: `math.scu.edu/putnam/`.

IN MEMORIAM

Cătălin ŢIGĂERU (1958-2013)

Redacţia revistei *Recreaţii Matematice* anunţă cu tristeţe şi regret pe colaboratorii săi stingerea din viaţă a celui care a fost lect.dr. **Cătălin Ţigăeru**, Facultatea de Inginerie Electrică şi Ştiinţa Calculatoarelor, Universitatea ,,Ştefan cel Mare" din Suceava. Geometru pasionat şi talentat, cu preocupări în domeniul geometriei diferenţiale, a publicat şi lucrări originale de matematică elementară. Rămâne prezent în paginile *Recreaţiilor* prin cinci articole abordând teme interesante, scrise cu eleganţă şi tratate în profunzime, care au constituit un aport la ridicarea nivelului revistei.

Cartea *,,Metodica predării matematicii în ciclul primar"*, scrisă de profesorul **Cătălin Ţigăeru** , apărută postum în Editura Universităţii ,,Ştefan cel Mare" din Suceava, a fost lansată în luna ianuarie a acestui an ca un omagiu adus autorului de către colegii săi. Cartea, cu valoare de testament - după cum a numit-o prof.univ.dr.ing. Adrian Graur -, reprezintă *,,o veritabilă sinteză didactică ce vine în sprijinul profesorilor din învăţământul primar, propunându-le acestora o abordare clară şi logică a conţinuturilor matematice din curriculum-ul pentru clasele I-IV"* (lect. Florica Diaconescu).

În amintirea celor care l-au cunoscut, va fi păstrată imaginea sa luminoasă de dascăl.