Une classe spéciale de matrices carrées

Adrien REISNER[1]

Abstract. This article studies some properties of matrices A which diagonal terms are its eigenvalues. We are interested in $\mathbb{R}$-similar matrix with a triangular form (there exists $P \in GL_n(\mathbb{R})$ such that, $P^{-1}AP$ is upper triangular) and focus on real symmetric and normal matrices -Propositions 11 and 13.

Keywords: eigenvalue, characteristic polynomial, symmetrical matrix, normal matrix.

MSC 2000: 15A18.

On désignera par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On considère les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ayant la propriété suivante:

Définition. On dit qu′une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède la *propriété* $\mathcal{B}$ ou est une $\mathcal{B}$*-matrice*, si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres, donc si son polynôme caractéristique est de la forme $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii} - X)$.

On désignera dans la suite par $\mathcal{B}_n$ l′ensemble des $\mathcal{B}$-matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Exemples. Une matrice triangulaire supérieure A est évidemment une $\mathcal{B}$-matrice. Si A est de plus inversible, alors son inverse est également une $\mathcal{B}$-matrice.

Proposition 1. Pour tout réel α, la matrice $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$ est une $\mathcal{B}$-matrice ([**1**], exercice 20.51, page 146).

Démonstration. En effet, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$ est $\chi_{M(\alpha)}(X) = -X^3 + (5-\alpha)X^2 - (8-3\alpha)X + (4-2\alpha) = (1-X)(2-X)(2-\alpha-X)$, et ainsi le spectre de $M(\alpha)$ est $Sp\, M(\alpha) = \{1, 2, 2-\alpha\}$, i.e. $M(\alpha) \in \mathcal{B}_3$.

Proposition 2. *La matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable si et seulement si $\alpha \neq 1$.*

Démonstration. Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ les trois valeurs propres de $M(\alpha)$ sont distinctes et par suite la matrice est diagonalisable . Si $\alpha = 0$, $\lambda = 2$ est valeur propre *double* de $M(0)$ admettant comme sous-espace propre associé *le plan* $E_2 : x + y = 0$ et la matrice $M(0)$ est encore diagonalisable (dim $E_2 = 2$).

Pour $\alpha = 1$ la matrice $M(1)$ admet $\lambda = 1$ pour valeur propre *double*, alors que le sous-espace propre associé est *la droite* E_1 dirigée par le vecteur $(1, -1, -1)$; dans ce cas $M(1)$ n′est donc pas diagonalisable (dim $E_1 = 1$).

2. Etude de l′ensemble $\mathcal{B}_2$.

Proposition 3. $\mathcal{B}_2$ *est l′ensemble des matrices triangulaires.*

[1] TELECOM ParisTech; e-mail: *Adrien.Reisner@telecom-paristech.fr*

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_2$ et $Q(X) = (X-a)(X-d)$. Le polynôme caractéristique de la matrice A étant $\chi_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$, A est une $\mathcal{B}$-matrice si et seulement si $Q(X) = \chi_A(X)$, c′est-à-dire si et seulement si $bc = 0$, d′où le résultat cherché.

Corollaire. $\mathcal{B}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration. L′ensemble T^+ des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un fermé comme sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et il en est de même pour l′ensemble T^- des matrices triangulaires inférieures. $\mathcal{B}_2$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ comme réunion des fermés T^- et T^+.

3. Etude de l′ensemble $\mathcal{B}_3$

Proposition 4. *Une $\mathcal{B}$-matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.*

Le théorème est évident puisque le déterminant d′une $\mathcal{B}$-matrice est égal au produit de ses éléments diagonaux.

Proposition 5. $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *est une $\mathcal{B}$-matrice si et seulement si*

$$\det A = \prod_{i=1}^{3} a_{ii} \quad \text{et} \quad a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0.$$

Démonstration. La matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une $\mathcal{B}$-matrice si et seulement si son polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ est égal au polynôme $(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$. En développant ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve les deux conditions de la proposition.

Corollaire. *Soit $A \in \mathcal{B}_3 \cap GL_3(\mathbb{R})$ une matrice vérifiant: $a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0$. Alors la matrice A^{-1} est elle-même une $\mathcal{B}$-matrice.*

Démonstration. Le cas trivial où la matrice est triangulaire inversible - voir Proposition 4 - étant mis de coté, examinons le cas où la $\mathcal{B}$-matrice A est de la forme $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & b \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & c & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec det $A \neq 0$. Le produit de deux matrices de ce type est encore une matrice de cette même forme avec sur la diagonale le produit des termes diagonaux correspondants. Si A est inversible, son inverse – qui est un polynôme de degré 2 en A (conséquence du théorème de Cayley-Hamilton) – est encore une matrice de la même forme et elle vérifie la condition de la Proposition 5. Les autres cas s′étudient de manière similaire.

Exemples de $\mathcal{B}$-matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Les quatre matrices suivantes sont des $\mathcal{B}$-matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque. Les matrices A_1, A_2 et A_3 sont inversibles. Les inverses des matrices A_1 et A_3 sont elles-mêmes des $\mathcal{B}$-matrices compte tenu du corollaire précédent.

4. Un exemple de $\mathcal{B}$-matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On se propose de trouver des $\mathcal{B}$-matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (1), où les éléments des matrices carrées A, B et C sont tous non nuls.

On utilise le lemme suivant:

Lemme. *Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a : $det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = det\ A\ det\ C$, A et C étant des matrices carrées.*

Démonstration immédiate, puisque $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_s(\mathbb{R})$.

Soit alors une $\mathcal{B}$-matrice M de la forme (1). Compte tenu du lemme précédent, le polynôme caractéristique de M est: $\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Si a ou d est valeur propre de A alors $\chi_A(X)$ est scindé et tr $A = a + d$, les valeurs propres de A sont a et d. La matrice A est alors une $\mathcal{B}$-matrice et d'après la Proposition 3 c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car A ne contient aucun élément nul. Donc les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d, i.e.: $\chi_A(X) = (X-e)(X-h)$ et $\chi_C(X) = (X-a)(X-d)$. En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients on obtient les relations: $a + d = e + h$, $ad - bc = eh$, $eh - gf = ad$. Pour trouver une $\mathcal{B}$-matrice de la forme (1) où les éléments des matrices carrées A, B et C sont tous non nuls, il suffit donc de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul. On peut considérer par exemple les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ ou encore: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque ([**1**], page 146)**.** Plus généralement, une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonale en blocs avec des blocs diagonaux qui sont *un mélange* des matrices triangulaires supérieures ou inférieures fournit un exemple non trivial de $\mathcal{B}$-matrices.

5. Quelques propriétes de $\mathcal{B}$-matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Proposition 6. *$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant une $\mathcal{B}$-matrice pour tout couple de réels (a, b) les matrices $aA + bI_n$ et $a^tA + bI_n$ sont encore des $\mathcal{B}$-matrices.*

Démonstration. A étant une $\mathcal{B}$-matrice ses valeurs propres sont $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Les valeurs propres des matrices $aA + bI_n$ et $a^tA + bI_n$ sont alors $(aa_{ii} + b)_{i:1,\ldots,n}$: ce sont les termes diagonaux de ces matrices, d'où la Proposition 6.

Proposition 7. *Le sous-ensemble des $\mathcal{B}$-matrices de $GL_n(\mathbb{R})$ est un ensemble dense dans $\mathcal{B}_n$.*

Démonstration. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{B}_n$. Pour k assez grand ($k \geq K_0$) $a_{ii} + \dfrac{1}{k} \neq 0$ pour tout $i : 1, \ldots, n$. La suite de matrices $(A_k)_{k \geq K_0}$ où $A_k = A + \dfrac{1}{k} I_n$ est une suite de $\mathcal{B}$-matrices, d'après la Proposition 6, inversibles, car aucun terme diagonal nul, et qui converge vers A, d'où la Proposition 7.

Remarque. *Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement une $\mathcal{B}$-matrice.* La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc diagonalisable et aussi trigonalisable mais d'après la Proposition 3 elle n'est pas une $\mathcal{B}$-matrice. La matrice de rang 1, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable – donc à fortiori trigonalisable – son spectre étant Sp $A = \{0, 2\}$ mais elle n'est pas une $\mathcal{B}$-matrice.

Proposition 8. *Une $\mathcal{B}$-matrice est trigonalisable.*

Démonstration. Une $\mathcal{B}$-matrice admet un polynôme caractéristique sur $\mathbb{K}$ et par suite elle est trigonalisable.

Proposition 9. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une $\mathcal{B}$-matrice si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Autrement dit les matrices réelles qui sont semblables à des $\mathcal{B}$-matrices réelles sont les matrices trigonalisables dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Si A est semblable à une $\mathcal{B}$-matrice B alors $\chi_A(X) = \chi_B(X)$ et $\chi_B(X)$ est scindé; il en est donc de même pour le polynôme $\chi_A(X)$. Inversement, si $\chi_A(X)$ est scindé, A est semblable à une matrice triangulaire et toute matrice triangulaire est une $\mathcal{B}$-matrice.

Proposition 10. *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux $\mathcal{B}$-matrices. $\mathcal{B}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Démonstration. C'est évident puisque toute matrice est la somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure et chacune de ces matrices est une $\mathcal{B}$-matrice. Il en découle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puisqu'il existe (dès que $n \geq 2$) des matrices qui ne sont pas des $\mathcal{B}$-matrices.

Proposition 11. *Les $\mathcal{B}$-matrices symétriques réelles sont les matrices diagonales. La seule $\mathcal{B}$-matrice antisymétrique réelle est la matrice nulle.*

Démonstration. a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle. A est orthodiagonalisable, i.e. A est semblable à une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$, et il vient: $trA^2 = trA^tA = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$. La première partie de la Proposition 11 en découle immédiatement.

b) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une $\mathcal{B}$-matrice antisymétrique. Son spectre est réduit à $\{0\}$ et par suite son polynôme caractéristique est X^n. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, A vérifie $A^n = 0$, et $({}^tAA)^n = (-A^2)^n = (-1)^n A^{2n} = 0$. Or, la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable en tant que matrice symétrique réelle. Comme $({}^tAA)^n = 0$, toutes ses valeurs propres sont nulles. La matrice ${}^t AA$ est semblable à la matrice nulle donc elle est nulle. On en déduit: $tr({}^t AA) = 0$ soit $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$ et par suite A est la matrice nulle.

Proposition 12. *La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $F \subset \mathcal{B}_n$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.*

Démonstration. Compte tenu de la Proposition 11, on a: $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$ où $\mathcal{A}_n$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il vient alors:

$$\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2,$$

d'où $\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. La Proposition 12 résulte alors du fait que $\mathcal{B}_n$ contient le sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures (inférieures).

On se propose de trouver un sous-espace vectoriel F contenu dans $\mathcal{B}_n$, $n > 2$, de dimension maximale qui n'est pas constitué uniquement des matrices triangulaires. Soit F l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $M = \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et C une matrice triangulaire *inférieure* d'ordre $n-1$. De façon évidente, F est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F = 1 + (n-1) + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Comme (a) et C sont des $\mathcal{B}$-matrices, il en résulte, compte tenu du Lemme de la page 29, que la matrice M est elle-même une $\mathcal{B}$-matrice – voir Remarque de la partie 4 – .

6. $\mathcal{B}$-matrices complexes. On rappelle qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale lorsque $AA^* = A^*A$ où $A^* = {}^t\overline{A}$ est l'adjoint de la matrice A. Le même raisonnement que celui utilisé à la Proposition 11 permet de démontrer la propriété suivante de certaines $\mathcal{B}$-matrices complexes.

Proposition 13. *Les deux assertions suivantes sont équivalentes: i) A est une $\mathcal{B}$-matrice normale, ii) A est une matrice diagonale.*

Je tiens à remercier ici mes collègues *Mmes Chantal Leduc, Fadila Tradi, MM. Zahir Abela, Olivier Allain, Hatem Abichou, Gabriel Amegandji, Patrick Bourgeois, Jérôme Neveu, Pierre Ortuno, Olivier Papillon* et les autres pour le soutien qu'ils m'ont apporté à l'écriture de mes articles.

Références

1. **R. Mneimné** – *Réduction des endomorphismes*, Ed. Calvage & Mounet, Paris, 2006.
2. **J.M. Arnaudiès, H. Fraysse** – *Cours de mathématiques*, Tome 4: Algèbre bilinéaire et géométrie, Ed. Dunod, Paris, 1990.
3. **J. Fresnel** – *Algèbre des matrices,* Ed. Hermann, Paris, 1997.