Concursul Internaţional de Matematică ,,Vladimir Andrunachievici”

Ediţia a II-a, Chişinău, 5 ianuarie 2012

Clasa a VI-a

1. Dacă la un număr natural se adună suma cifrelor lui, atunci se obţine numărul 2012. Să se determine toate numerele naturale cu această proprietate.

2. În sistemul zecimal, cifrele x şi y şi numărul natural n satisfac egalitatea

$$\overline{xy} + \overline{yx} = 1 + 2 + ... + n.$$

Să se determine toate valorile lui n şi toate numerele $\overline{xy}$ care satisfac această egalitate.

3. Să se determine 15 numere naturale nenule cu proprietatea că, dacă fiecare din ele este mărit cu 1, atunci produsul tuturor numerelor mărite este de 2012 ori mai mare decât produsul numerelor iniţiale.

4. Pe tablă sunt scrise numerele $1, 2, 3, ..., 33$. Un elev efectuiază următoarea operaţie: alege două numere astfel încât unul din ele să fie multiplu al celuilalt şi apoi le înlocuieşte cu câtul lor. Elevul repetă operaţia până când niciun număr de pe tablă nu este multiplu al altuia. Să se determine câte numere rămân pe tablă în situaţia în care elevul nu mai poate repeta operaţia.

Clasa a VII-a

1. Să se determine toate perechile (m, n) de numere întregi care satisfac ecuaţia

$$(m + n) \cdot (m + n + 2) = 23 \cdot 3^{|m-n|} + 1.$$

2. Un pătrat de dimensiuni 8×8 este divizat în 64 pătrăţele de dimensiuni 1×1. Care este numărul maxim de diagonale care pot fi duse în pătrăţelele 1×1 astfel încât oricare două diagonale să nu aibă puncte comune?

3. Fie p un număr prim. Printre numerele naturale n de forma

$$n = (p^2 + 32)^2 - 69 \cdot (p^2 + 32) + 2250,$$

să se determine numărul cu cea mai mică sumă posibilă a cifrelor lui.

4. Numerele a, b, c sunt elemente ale mulţimii $\{1, 2, ..., 2012\}$. Să se determine numărul tuturor tripletelor ordonate diferite (a, b, c) cu proprietatea că suma $a+b+c$ este un multiplu al fiecărui din numerele a, b, c. (Două triplete formate din aceleaşi trei numere sunt triplete ordonate diferite dacă ordinea numerelor în aceste triplete este diferită.)

Clasa a IX-a

1. Să se determine cel mai mic număr natural nenul n astfel încât numerele $14n,\ 16n,\ 18n,\ 20n$ să aibă acelaşi număr de divizori.

2. Fie paralelogramul $ABCD$ cu unghiul ABC obtuz. Punctul P interior triunghiului BDC este situat pe diagonala (AC) astfel încât $m(\angle BPD) = m(\angle ABC)$. Să se demonstreze că dreapta CD este tangentă la cercul circumscris triunghiului BCP dacă şi numai dacă $|AB| = |BD|$.

3. Să se determine toate perechile (a, b) de numere naturale care satisfac ecuaţia

$$4^a + 4a^2 + 4 = b^2.$$

4. Fie numerele reale

$$A = \sqrt{10+\sqrt{1}} + \sqrt{10+\sqrt{2}} + ... + \sqrt{10+\sqrt{99}},$$
$$B = \sqrt{10-\sqrt{1}} + \sqrt{10-\sqrt{2}} + ... + \sqrt{10-\sqrt{99}}.$$

Să se arate că numărul $\dfrac{A}{B} - \sqrt{2}$ este natural.

Clasa a XII-a

1. Toate elementele mulţimii

$$A = \{p, 3p+2, 5p+4, 7p+6, 9p+8, 11p+10\}$$

sunt numere prime. Să se arate că numărul $17p + 2012$ este compus.

2. Mulţimea nevidă A conţine m numere naturale pare nenule, iar mulţimea nevidă B conţine n numere naturale impare astfel încât suma elementelor din ambele mulţimi este egală cu 2012. Să se afle cea mai mare valoare posibilă a sumei $3m + 4n$.

3. Să se calculeze integrala Riemann a funcţiei

$$f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = e^x \cdot \frac{\cos 2x + \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{(1+\sin x)(1+\cos x)}}.$$

4. Şirul de numere întregi pozitive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisface condiţiile: a_n este un multiplu al lui n şi $|a_n - a_{n+1}| \leq 5$. Să se determine cea mai mare valoare posibilă a lui a_1.

Recreaţii ... matematice

Asupra numerelor 4 din expresia

$$\underbrace{4\ 4\ \ldots\ 4}_{n} = 28 \ \ (n \geq 2)$$

utilizaţi diverse operaţii uzuale cu numere pentru a o transforma într-o egalitate.

N.B. Răspunsul se găseşte la pag. 37.