Graphes et matrices de Moore

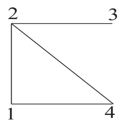
Adrien REISNER[1]

Abstract. Let G be any graph with maximum degree d and diameter $D = 2$. A Moore graph is defined as a graph for which $n = d^2 + 1$, where n is the order of G. Some elementary properties of these graphs are presented. It is proved the Hoffman-Singleton theorem, which asserts that $d \in \{2, 3, 7, 57\}$. A particular attention is given to the Moore graphs with degree 2 and 3.

Keywords: Moore graph, Moore matrix, Petersen graph, Hoffman-Singleton graph.

MSC 2000: 05C50.

I. Quelques définitions de la théorie des graphes. Un graphe non orienté $G = (S, A)$ est défini par un ensemble fini quelconque S dont les éléments sont appelés les **sommets** et par un sous - ensemble A de $S \times S$ dont les éléments sont appelés les **arêtes**. Le cardinal de S est l′**ordre** du graphe. Les sommets a et b sont adjacents si $(a, b) \in A$. Le nombre de sommets adjacents au sommet a est appelé le **degré de** a, noté $d(a)$. Le degré maximal de G est $d = \mathrm{Max}_{s\in S} d(s)$. Un **chemin de longueur** n entre les sommets a et b est une suite $(a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$ de sommets adjacents. Pour toute paire de sommets a, b de G la **distance de** a **à** b est la longueur du plus court chemin entre a et b. Le **diamètre** D du graphe G est la distance maximale entre deux sommets distincts de G. Ayant numéroté les sommets d′un graphe G d′ordre n : $S = \{x_i | i : 1, \ldots, n\}$ la **matrice d′adjacence** du graphe G est la matrice $Adj(G) = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$ définie par: $a_{ij} = 1$ si x_i, x_j sont adjacents et $a_{ij} = 0$ sinon.

Exemple. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d′adjacence du graphe 

Soit un graphe G d′ordre n de diamètre $D = 2$ (deux sommets quelconques sont donc à une distance 1 ou 2) et de degré maximal d.

Proposition 1. *On a* : $n \le d^2 + 1$.

En effet, fixons un sommet $s \in S$. Ce sommet s possède au plus d voisins et chacun de ceux-ci possède au plus $d - 1$ voisins autres que s. Donc le graphe possède au plus $d + 1 + d(d - 1) = d^2 + 1$ sommets.

II. Graphes et matrices de Moore. On appelle d**-graphe de Moore** un graphe non orienté de diamètre $D = 2$ et vérifiant: $n = d^2 + 1$. La matrice d′adjacence d′un tel graphe est une matrice de Moore. Le raisonnement de la proposition 1 montre que dans un d-graphe de Moore chaque sommet est de degré d et est relié à tout sommet distinct par exactement un chemin (d′ordre 1 ou 2) (*).

J_n étant la matrice carrée d′ordre n dont tous les coefficients valent 1, on a le théorème:

Théorème 2. *Une matrice de Moore A est une matrice binaire telle que: i) A est symétrique, ii) $trA = 0$, iii) il existe $d \ge 1$ vérifiant:* $A^2 + A - (d - 1)I_n = J_n$.

[1] Centre de Calcul E.N.S.T., Paris; e-mail: *Adrien.Reisner@telecom-paristech.fr*

Etant donné $A = (a_{ij})$ une matrice de Moore, démontrons d'abord le lemme suivant où $A^2 = (\alpha_{ij})$:

Lemme. *α_{ij} est le nombre de chemins de longueur 2 du sommet i au sommet j.*

En effet, $\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = a_{ik}a_{jk}$ la matrice A étant symétrique. α_{ij} est le nombre de 1 communs à la ligne i et à la ligne j: c'est aussi le nombre de chemins de longueur 2 du sommet i au sommet j compte tenu de la définition même de la matrice d'adjacence A du graphe de Moore.

Un d-graphe de Moore G étant non orienté, sa matrice d'adjacence est symétrique. D'après (*) $a_{ii} = 0$ pour tout $i : 1, \ldots, n$ et par suite $trA = 0$. Si $j = i$, on a $a_{ii} = 0$ et $\alpha_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = d$ nombre de sommets voisins du i-ème sommet; donc $a_{ii} + \alpha_{ii} = d$. Si $i \neq j$, soit $a_{ij} = 0$ et alors les sommets i et j sont reliés par un chemin de longueur 2 et $\alpha_{ij} = 1$, soit $a_{ij} = 1$ et les sommets i et j ne sont pas reliés par un chemin d'ordre 2, donc $\alpha_{ij} = 0$. Dans tous les cas on a: $a_{ij} + \alpha_{ij} = 1$. Finalement: $a_{ij} + \alpha_{ij} = 1 + (d-1)\delta_{ij}$ soit $A^2 + A - (d-1)I_n = J_n$.

On se propose d'étudier le spectre de la matrice A, i.e. l'ensemble des valeurs propres de cette matrice, et de montrer que le degré maximal d d'un d-graphe de Moore appartient obligatoirement à l'ensemble $\{2, 3, 7, 57\}$.

Soit une matrice de Moore $A = (a_{ij})$. U étant le vecteur colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1, on a:

Théorème 3. *d est valeur propre de la matrice A associé au vecteur propre $U : AU = dU$.*

Avec les notations précédentes α_{ii} est le nombre de 1 dans la ligne i et d'autre part - voir démonstration du théorème $2 - \alpha_{ii} = d$, d'où le théorème 3.

Soit E_d le sous-espace propre associé à d . b et c étant les racines du polynôme $X^2 + X - (d-1) : b = \dfrac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2} < 0$ et $c = \dfrac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2} > 0$, on a le théorème suivant:

Théorème 4. *Le spectre $Sp(A)$ de la matrice A est tel que $Sp(A) \subset \{b, c, d\}$.*

Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé, i.e. $AX = \lambda X$. On a alors: $J_n X = (\lambda^2 + \lambda - (d-1))X$. Par suite X est aussi vecteur propre de la matrice J_n pour la valeur propre $\lambda^2 + \lambda - (d-1)$. Or cette matrice J_n est de rang 1 et diagonalisable: $Sp(J_n) = \{0, n\}$. Il en résulte alors soit que les vecteurs X et U sont liés et dans ce cas $\lambda = d$ compte tenu du théorème 3, soit $X = KerJ_n$ et dans ce cas $\lambda \in \{b, c\}$.

La matrice A étant symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}$ orthonormée. Le sous-espace propre associé à la valeur propre d est la droite vectorielle $\mathbb{R}U$.

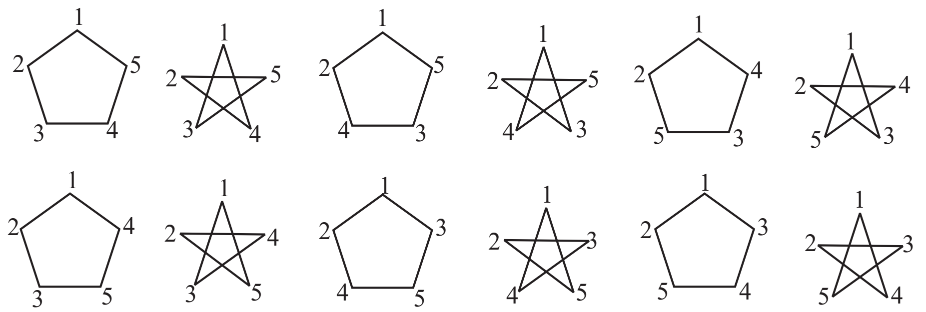
Théorème 5 (Hoffman et Singleton, 1960). *On a $d \in \{2, 3, 7, 57\}$ (voir* [**1**] *pour une démonstration utilisant des outils de la théorie des graphes).*

Soient E_b et E_c les sous – espaces propres associés aux valeurs propre b et c respectivement. Désignons par $\beta = \dim E_b \in \mathbb{N}^*$. Il vient alors, la matrice A étant diagonalisable et avec $\dim E_d = 1$: $\dim E_c = n - 1 - \beta = d^2 - \beta$. Exprimons que $\operatorname{tr} A = 0$: $d + \beta b + (d^2 - \beta)c = 0$, avec $\beta \in \mathbb{N}^*$. On obtient: $d + \beta \frac{-1-\sqrt{4d-3}}{2} + (d^2 - \beta)\frac{-1+\sqrt{4d-3}}{2} = 0$, d'où

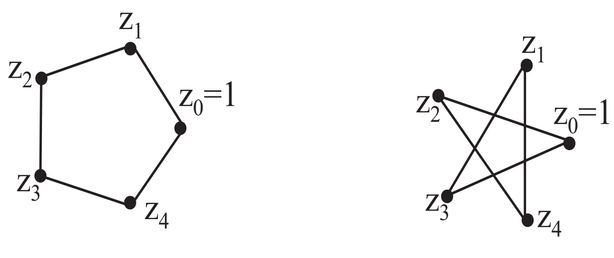
$$(1) \qquad (d^2 - 2\beta)\sqrt{4d-3} = d^2 - 2d \text{ soit } \beta = \frac{d(2-d) + d^2\sqrt{4d-3}}{2\sqrt{4d-3}} \in \mathbb{N}^2$$

β étant un entier non nul, on a $d = 2$ et donc $\beta = 2$, sinon $p = \sqrt{4d-3} \in \mathbb{N}^*$. La relation (1) montre alors que p divise $d^2 - 2d = \dfrac{p^2+3}{4} \cdot \dfrac{p^2+5}{4}$, donc que $16p$ divise $d^2 - 2d = \dfrac{p^2+3}{4} \cdot \dfrac{p^2-5}{4}$. Cela impose que p divise 15 soit que $p \in \{1, 3, 5, 15\}$. Les seules valeurs possibles pour d sont donc finalement: $d \in \{2, 3, 7, 57\}$ (Le cas $p = 1$, $d = 1$ doit être écarté car alors $n = 2$ et le diamètre est 1).

Exemple. On se propose de trouver tous les 2-graphes de Moore (donc $n = 5$). Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. Pour $i, j, k, l, m \in \{1, \ldots, 5\}$, tous distincts deux à deux, soit f un endomorphisme tel que $Mat(f, \mathcal{B}) = A \in M_5(\mathbb{R})$ soit une matrice de Moore. Alors f est tel que: $f(e_i) = e_j + e_k$, $f(e_j) = e_i + e_l$, $f(e_k) = e_i + e_m$, $f(e_l) = e_j + e_m$, $f(e_m) = e_k + e_l$. Un simple raisonnement combinatoire montre alors que le nombre N_2 des 2-graphes de Moore est: $N_2 = 2(3 + 2 + 1) = 12$. Les douze 2-graphes de Moore ($n = 5$) sont les suivants:



III. Applications. A. Graphe de Cayley d'un groupe fini. On considère un groupe fini $\Gamma = \{g_j\}$ d'élément neutre 1 et $\mathbb{K}$ une partie génératrice de Γ vérifiant: $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{K}$ et $1 \notin \mathbb{K}$. On appelle **graphe de Cayley** du groupe associé à $\mathbb{K}$ le graphe



$Cay(\Gamma, \mathbb{K}) = (S, A)$ ainsi défini: $S = \{g_j\}$, $(g_i, g_j) \in A \Leftrightarrow g_i^{-1} g_j \in \mathbb{K}$. Soit le groupe cyclique $\mathbb{U}_5 = \{z_j = e^{\frac{2i\pi j}{5}}\}_{j:0,\ldots,4}$ et $\mathbb{K}_1 = \{z_1, z_4\}$, $\mathbb{K}_2 = \{z_2, z_3\}$. Les graphes de Cayley $Cay(\mathbb{U}_5, \mathbb{K}_1)$ et $Cay(\mathbb{U}_5, \mathbb{K}_2)$ sont les deux 2-graphes de Moore ci-dessus.

B. Matrice de Gram. Soit l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^5$ rapporté à la base orthonormée $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_5\}$. On note $< u, v >$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^5$. On considère tous les vecteurs u_j obtenus en ajoutant deux vecteurs distincts de la base $\mathcal{B}$: $u_j = e_\alpha + e_\beta$ où $\alpha \neq \beta$. On obtient ainsi 10 vecteurs distincts deux à deux (en effet, en utilisant le fait que la famille $(e_k)_{k:1,\ldots,5}$ est libre on $a = 10$ choix possibles). La matrice de Gram de la famille des vecteurs $(u_j)_{j:1,\ldots,10}$ est définie par: $M = Gram(u_j) = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{10}(\mathbb{R})$ avec $m_{ij} =< u_i, u_j >$. Calculons les produits scalaires $< u_i, u_j >$ en distinguant trois cas:

1) $< u_i, u_i >=< e_\alpha, e_\alpha > +2 < e_\alpha, e_\beta > + < e_\beta, e_\beta >= 2$ si $u_i = e_\alpha + e_\beta$;

2) $< u_i, u_j >=< e_\alpha, e_\alpha > + < e_\alpha, e_\gamma > + < e_\beta, e_\alpha > + < e_\alpha, e_\gamma >= 1$ si $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\alpha + e_\gamma$, $\beta \neq \gamma$;

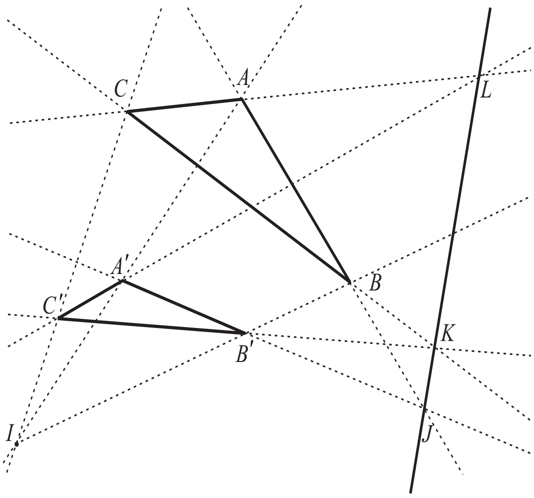
3) $< u_i, u_j >= 0$ si $u_i = e_\alpha + e_\beta$ et $u_j = e_\delta + e_\gamma$ $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ distincts.

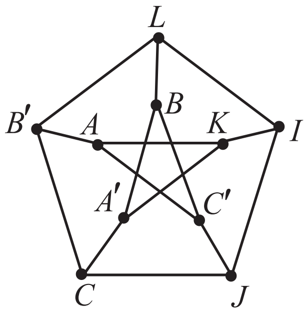
On vérifie alors immédiatement la proposition suivante:

Proposition 6. *La matrice $A = J_{10} - M + I_{10}$ est une matrice de Moore. $SpA \subset \mathbb{Z}^*$.*

En particulier, i étant fixé, soit $u_i = e_\alpha + e_\beta$ où $\alpha \neq \beta$. Si $u_j = e_\delta + e_\gamma$ on a $m_{ij} = 1$ si et seulement si les quatre indices $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ sont distincts. Pour i donné il y a donc $\binom{3}{2} = 3$ tels coefficients: dans ce cas $d = 3$ (donc on a bien $n = 10$). Le 3-graphe de Moore ainsi obtenu est un graphe de Petersen - voir ce graphe ci-dessous (la figure de droite).

C. Configuration de Desargues. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles sans sommets communs. Si AA', BB' et CC' sont concourantes en I, alors les points





$J = AB \cap A'B'$, $K = BC \cap B'C'$ et $L = CA \cap C'A'$ sont alignés: c'est le **théorème**

de Desargues. Dans cette configuration - *configuration de Desargues* - il y a 10 droites et 10 points; par chaque point il passe 3 droites et sur chaque droite il y a 3 points. On représente cette configuration par un graphe $G = (S, A)$. Les sommets de ce graphe sont les 10 points de la configuration de Desargues. Deux sommets i et j sont reliés par une arête si et seulement si les points correspondants ne sont pas sur une même droite. On obtient ainsi le 3-graphe de Moore, i.e. le *graphe de Petersen* G ci-dessus.

Remarque. Pour $d = 2$, $d = 3$ et $d = 7$ on a montré l'existence des d-graphes de Moore: *graphes de Petersen* pour $d = 3$, $n = 10$ (voir le site web: `http://mathematiques.ac-dijon.fr/ressources/graphes/jca/intro.htm`), *graphes de Hoffman – Singleton* pour $d = 7, n = 50$. Par contre, l'existence d'un *57-graphe de Moore* n'a pas été encore démontré: un tel graphe aurait 3250 sommets.

Références

1. **A.J. Hoffman, R.R. Singleton** - *On Moore Graphs with Diameters 2 and 3*, IBMJ. Res. Develop., 5(4)(1960), 497-504.
2. **S.V. Duzhin** - *Graphes de Moore* (démonstration de Chmutov), `http://www.pdmi.ras.ru/ duzhin/papers/` .
3. **R.A. Brualdi , H.J. Ryser** - *Combinatorial matrix theory*, Cambridge University Press, 1991.

Recreații ... matematice

(*continuare de la pag. 22*)

Deci nu putem avea decât $A + B + C = 18$ care, coroborată cu condiţia a doua a ipotezei, impune rezultatului să fie format din cifrele $5, 6$ respectiv 7, nu neapărat în această ordine.

Să găsim toate posibilităţile. Mai întâi, observăm că dacă schimbăm a cu a', b cu b' şi c cu c' rezultatul nu se modifică (transformarea 1). Asta înseamnă că, dacă fixăm un "exemplu reprezentativ" (să zicem $a < a'$, $b < b'$şi $c < c'$), se obţin 2^3 posibilităţi. Apoi, observăm că, dacă are loc $\overline{abc} + \overline{a'b'c'} = \overline{ABC}$, atunci are loc şi $\overline{bca} + \overline{b'c'a'} = \overline{BCA}$ (transformarea 2). Asta înseamnă că pentru un exemplu reprezentativ obţinem $2 \cdot 2^3 = 16$ posibilităţi.

Următoarele două exemple sunt reprezentative $128+439 = 567$ şi $218+439 = 657$. Pentru primul exemplu obţinem: $128 + 439 = 567$, $138 + 429 = 567$, $129 + 438 = 567$, $139 + 428 = 567$, $428 + 139 = 567$, $438 + 129 = 567$, $429 + 138 = 567$, $429 + 138 = 567$ (conform transformării 1), la care aplicăm transformarea 2: $281 + 394 = 675$, $381+294 = 675$, $291+384 = 675$, $391+284 = 675$, $284+391 = 675$, $384+291 = 675$, $294 + 381 = 675$, $294 + 381 = 675$ - în total 16 posibilităţi. Analog pentru celălalt exemplu reprezentativ. Avem $2 \cdot 16 = 32$ posibilităţi.