Probleme pentru clasa a VIII-a – *Holger STEPHAN*

Enunţuri şi soluţii

1. *Patru numere adunate două câte două dau sumele* 4, 7, 9, 14, 16, 19. *Care sunt cele patru numere?*

Soluţie. Fie x_1, x_2, x_3 şi x_4 cele patru numere. Vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Observăm că $x_1 + x_2 \leq x_1 + x_3 \leq x_1 + x_4$ şi $x_2 + x_3 \leq x_2 + x_4 \leq x_3 + x_4$. Relativ la sumele $x_1 + x_4$ şi $x_2 + x_3$ putem avea atât $x_1 + x_4 \leq x_2 + x_3$ cât şi $x_2 + x_3 \leq x_1 + x_4$. Ca urmare, suntem conduşi la următoarele două sisteme:

$$x_1+x_2 = 4,\ x_1+x_3 = 7,\ x_1+x_4 = 9,\ x_2+x_3 = 14,\ x_2+x_4 = 16,\ x_3+x_4 = 19; \quad (1)$$

$$x_1+x_2 = 4,\ x_1+x_3 = 7,\ x_1+x_4 = 14,\ x_2+x_3 = 9,\ x_2+x_4 = 16,\ x_3+x_4 = 19. \quad (2)$$

Rezolvăm mai întâi sistemul (1). Adunând primele două ecuaţii şi din rezultat scăzând a patra, obţinem $2x_1 = -3$. Prin înlocuire în primele trei ecuaţii, găsim $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{11}{2}$, $x_3 = \frac{17}{2}$, $x_4 = \frac{21}{2}$, care verifică şi ultimele două ecuaţii.

În mod similar, sistemul (2) conduce la soluţia $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 13$.

2. *Demonstraţi că prin "rotirea către dreapta" a unui număr de* 8 *cifre, divizibil cu* 73*, se obţine tot un număr divizibil cu* 73*. (Se spune că un număr natural este "rotit către dreapta", dacă ultima cifră este mutată în faţa primei cifre; exemplu:* $1234 \to 4123$*.)*

Soluţie. Fie $x = \overline{x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1x_0}$ un astfel de număr şi $y = \overline{x_0x_7x_6x_5x_4x_3x_2x_1}$ rotitul său către dreapta. Avem

$$\begin{aligned} 7x + 3y =& 7\big(10^7x_7 + 10^6x_6 + \cdots + 10x_1 + x_0\big) + 3\big(10^7x_0 + 10^6x_7 + \cdots + 10x_2 + x_1\big) = \\ &= \big(3\cdot 10^7 + 7\big)\,x_0 + \big(7\cdot 10^7 + 3\cdot 10^6\big)\,x_7 + \big(7\cdot 10^6 + 3\cdot 10^5\big)\,x_6 + \cdots + \\ &\qquad + \big(7\cdot 10^2 + 3\cdot 10\big)\,x_2 + (7\cdot 10 + 3)\,x_1 = \\ &= \big(3\cdot 10^7 + 7\big)\,x_0 + 73\cdot 10^6x_7 + 73\cdot 10^5x_6 + \cdots + 73\cdot 10x_2 + 73x_1\ . \end{aligned}$$

Dar $3\cdot 10^7 + 7 = 73\cdot 410956$ şi, deci, $7x + 3y$ este divizibil cu 73. Deoarece coeficienţii lui x şi y nu se divid cu 73, rezultă că x şi y pot fi doar simultan divizibile cu 73.

3. *Aflaţi cifrele necunoscute x, y, z din egalitatea* $20\,058\,473\cdot 11! = \overline{x00yz0055046400}$.

Soluţie. Egalitatea din enunţ se scrie $2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11\cdot 20\,058\,473 = \overline{x00yz0055046400}$. Observăm că puterile lui 5 sau ale lui 2, cu care este divizibil numărul, dau informaţii doar despre ultimele lui 8 cifre (care, însă, sunt cunoscute). Apelăm la criteriile de divizibilitate cu 7, 9 şi 11, aplicate numărului $\overline{x00yz00550464}$, care vor antrena cifrele x, y, z; obţinem

$$x + y + z + 24 = 9i, \quad x - y + z + 2 = 11j, \quad x - y + 2z + 5 = 7k \qquad (1)$$

(pentru ultima egalitate s-a folosit faptul că un număr este divizibil cu 7 dacă suma ponderată a cifrelor sale cu ponderile 1, 3, 2, −1, −3, −2, utilizate periodic începând de la unităţi spre puterile mai mari ale lui 10, este divizibilă cu 7).

Cum $1 \leq x \leq 9$ şi $0 \leq y, z \leq 9$, din (1) rezultă că avem $25 \leq 9i \leq 51$, $-7 \leq 11j \leq 20$, $-4 \leq 7k \leq 32$, adică

$$i \in \{3, 4, 5\}, \quad j \in \{0, 1\}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \qquad (2)$$

Soluţia sistemului (1) în x, y, z este

$$x = \frac{1}{2}\left(9i + 33j - 14k - 20\right), \quad y = \frac{1}{2}\left(9i - 11j - 22\right), \quad z = 7k - 11j - 3. \qquad (3)$$

Expresia lui y din (3) arată că i şi j trebuie să aibă aceeaşi paritate. Ca urmare, există trei cazuri:

1° $i = 3$ şi $j = 1$, caz ce conduce la $y = -3$, ceea ce este imposibil;

2° $i = 5$ şi $j = 1$, care dă $x = 29 - 7k$, $y = 6$ şi $z = 7k - 14$; pentru $k = 3$ se obţine soluţia $x = 8$, $y = 6$, $z = 7$;

3° $i = 4$ şi $j = 0$, care dă $x = 8 - 7k$, $y = 7$, $z = 7k - 3$; pentru $k = 1$ obţinem soluţia $x = 1$, $y = 7$, $z = 4$.

Aşadar, sunt posibile două numere divizibile cu 9, 7 şi 11: 800 670 055 046 400 şi 100 740 055 046 400. Pentru a decide care este numărul corect este necesar încă un test de divizibilitate, şi anume, cu 27. Puterile lui 10 împărţite la 27 pot da resturile 1, 10 sau -8, în mod periodic. Aplicând această observaţie la primul număr, avem

$$1 \cdot (0 + 6 + 5 + 0 + 0) + 10 \cdot (0 + 4 + 5 + 7 + 0) - 8 \cdot (4 + 0 + 0 + 6 + 8) = 27,$$

deci acest număr este divizibil cu 27. Relativ la al doilea număr avem

$$1 \cdot (0 + 6 + 5 + 0 + 0) + 10 \cdot (0 + 4 + 5 + 4 + 0) - 8 \cdot (4 + 0 + 0 + 7 + 1) = 45,$$

adică acest număr nu se divide cu 27 şi trebuie exclus.

În final, singura soluţie valabilă este numărul 800 670 055 046 400.

4. *Un număr x format din cinci cifre diferite şi nenule este divizibil cu 9. Arătaţi că suma tuturor numerelor de cinci cifre distincte ce se pot forma cu aceste cinci cifre (inclusiv x) este divizibilă cu 2399976.*

Soluţie. Fie $x = \overline{x_1x_2x_3x_4x_5}$. Cifra x_1 este exact de $4! = 24$ ori pe prima poziţie. Adunarea tuturor acestor prime poziţii egale cu x_1 dă numărul $24 \cdot 10000x_1$. Şi pe poziţia a doua, a treia etc. apare cifra x_1 tot de 24 ori. Cifra x_1 va contribui la suma totală S cu

$$24 \cdot 10000 + 24 \cdot 1000 + 24 \cdot 100 + 24 \cdot 10 + 24 \cdot 1 = 24 \cdot 11111 = 266\,664.$$

Aceasta e valabil pentru orice cifră. Deci pentru suma S avem

$$S = 266664\left(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5\right).$$

Deoarece x e divizibil cu 9, atunci şi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ este divizibil cu 9. În consecinţă, S este divizibilă cu $266\,664 \cdot 9 = 2\,399\,976$.

5. *Găsiţi toate perechile de numere întregi x şi y care sunt soluţii ale ecuaţiei diofantice $2x^2 + 7xy + 3y^2 = 228$.*

Soluţie. Scriem ecuaţia în forma $(x + 3y)(2x + y) = 228$. Dacă numărul 228 este descompus într-un produs de doi factori întregi $p \cdot q = 228$, atunci putem scrie sistemul

$$2x + y = p, \quad x + 3y = q$$

cu soluţia

$$x = \frac{3p - q}{5}, \quad y = \frac{2q - p}{5}.$$

228 are divizorii 1, 2, 3, 4, 6, 12, 19, 38, 57, 76, 114, 228 şi cei corespunzători cu semnul minus. Dacă înlocuim p şi q cu aceşti divizori şi calculăm, obţinem

p	1	2	3	4	6	12	19	38	57	76	114	228
q	228	114	76	57	38	19	12	6	4	3	2	1
x	-45	$-\dfrac{108}{5}$	$-\dfrac{67}{5}$	-9	-4	$\dfrac{17}{5}$	9	$\dfrac{108}{5}$	$\dfrac{167}{5}$	45	68	$\dfrac{683}{5}$
y	91			22	14		1			-14	-22	

În concluzie, avem perechile de soluţii $(-45,91)$, $(-9,22)$, $(-4,14)$, $(9,1)$, $(45,-14)$ şi $(68,-22)$, împreună cu variantele negative $(45,-91)$, $(9,-22)$, $(4,-14)$, $(-9,-1)$, $(-45,14)$ şi $(-68,22)$.

6. *Găsiţi toate perechile de numere întregi x şi y care sunt soluţii ale ecuaţiei diofantice $2x^2+3y^2=77$.*

Soluţie. Dacă perechea (x,y) este soluţie, atunci şi perechile $(-x,y)$, $(x,-y)$ şi $(-x,-y)$ sunt soluţii. E suficient să considerăm soluţiile nenegative. Deoarece $x^2\geq 0$ avem $0\leq 3y^2\leq 77$ sau $0\leq y\leq 5$. y nu poate fi par, deoarece $2x^2$ este par şi 77 este impar. E destul să dăm lui y valorile 1, 3 şi 5. Ultimele două furnizează valori întregi pentru x. Obţinem $(x,y)=(1,5)$, $(5,3)$ şi $(x,y)=(-1,5)$, $(1,-5)$, $(-1,-5)$, $(-5,3)$, $(5,-3)$, $(-5,-3)$.

7. *Considerăm numărul natural n, $1000\leq n<5000$. Formăm numărul (de 12 sau 13 cifre) obţinut scriind în ordine cifrele lui $3n$, $2n$ şi respectiv n. Arătaţi că acest număr este divizibil cu 2^8+1.*

Soluţie. Numărul $2n$ are patru cifre deoarece $n<5000$. Deci numărul m, obţinut ca în enunţ, are 12 sau 13 cifre. Atunci avem

$$m=300\,000\,000n+20\,000n+n=300\,020\,001n=3\cdot 41\cdot 257\cdot 9491\cdot n.$$

Deci m este divizibil cu $2^8+1=257$.

8. *Şase numere prime $7<p_1<p_2<p_3<p_4<p_5<p_6$ formează un "sextet de numere prime", dacă p_2, p_3 şi p_4, p_5 sunt numere prime gemene (adică $p_3-p_2==p_5-p_4=2$), iar $p_2-p_1=p_4-p_3=p_6-p_5=4$. Demonstraţi că suma lor este divizibilă cu 630.*

Soluţie. Fie M numărul care satisface

$$p_1=M-8,\ p_2=M-4,\ p_3=M-2,\ p_4=M+2,\ p_5=M+4,\ p_6=M+8.$$

Deoarece p_i sunt numere prime mai mari ca 7, nu pot fi divizibile prin 2, 3, 5 sau 7. Ca urmare, M este impar şi divizibil cu 3, 5 şi 7. M se poate reprezenta, deci, astfel: $M=210k+105$. Atunci, avem

$$p_1=210k+97,\ p_2=210k+101,\ p_3=210k+103,$$
$$p_4=210k+107,\ p_5=210k+109,\ p_6=210k+113$$

şi, în concluzie, $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1260k+630=630\,(2k+1)$.

9. *Este posibil ca suma a şapte pătrate perfecte succesive să fie un pătrat perfect?*

Soluţie. Suma a şapte pătrate perfecte consecutive se poate scrie astfel:

$$(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2=7\left(n^2+4\right).$$

Pentru ca rezultatul să fie pătrat perfect este necesar ca n^2+4 să fie divizibil cu 7. Dar n^2 dă doar resturile 0, 1 sau -3 la împărţirea cu 7. Ca urmare, $7\left(n^2+4\right)$ este divizibil cu 7, dar nu cu 49 şi nu poate să fie pătrat perfect.