## CORESPONDENȚE

# Probleme selectate de la Olimpiadele de Matematică ale Republicii Moldova

**Notă.** *Material trimis pentru publicare Redacţiei de către Dr.* ***Valeriu GUŢU****, Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea de Stat din Chişinău.*

## Enunţuri

**1.** Se consideră şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $a_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului $x$. Să se arate că

$$a_n = 2 + a_{n-1}, \tag{1}$$

dacă şi numai dacă $n$ este un număr prim. (*O. R. M. – 1997*)

**2.** Să se demonstreze că, pentru orice numere naturale $m, n \geq 2$, cel mai mic dintre numerele $\sqrt[n]{m}$ şi $\sqrt[m]{n}$ nu depăşeşte numărul $\sqrt[3]{3}$. (*O. R. M. – 1996*)

**3.** Polinomul $P(X)$ de grad $n \geq 5$, cu coeficienţi întregi, are $n$ rădăcini întregi distincte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, unde $\alpha_1 = 0$. Să se găsească toate rădăcinile întregi ale polinomului $P(P(X))$. (*O. R. M. – 1997*)

**4.** Fie triunghiul $ABC$ cu înălţimea $CD$. Se ştie că $AB = 1999$, $BC = 1998$ şi $AC = 2000$. Cercurile înscrise în triunghiurile $ACD$ şi $BCD$ sunt tangente la segmentul $CD$ în punctele $M$ şi $N$ respectiv. Să se afle $MN$. (*O. R. M. – 1999*)

**5.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Pe laturile $AB$ şi $CD$ se iau punctele interioare $X$ şi $Y$. Fie $M$ punctul de intersecţie a dreptelor $XD$ şi $YA$ şi $N$ punctul de intersecţie a dreptelor $XC$ şi $YB$. Pentru ce poziţie a punctelor $X$ şi $Y$ aria patrulaterului $XNYM$ este maximă? (*O. R. M. – 1997*)

**6.** Doi fraţi au vândut $n$ pui cu câte $n$ lei fiecare. Banii i-au împărţit astfel: fratele mai mare a luat 10 lei, apoi cel mai mic 10 lei, apoi din nou cel mai mare, ş. a. m. d. Fratelui mai mic i-a revenit la sfârşit o sumă mai mică decât 10 lei. El a luat acest rest şi încă briceagul fratelui mai mare, ambii acceptând că au obţinut în final acelaşi câştig. Cât costă briceagul? (*O. R. M. – 1996*)

**7.** Fie $n$ un număr natural astfel încât numărul $2n^2$ are 28 de divizori (pozitivi) distincţi, iar numărul $3n^2$ are 24 de divizori distincţi. Câţi divizori distincţi are numărul $6n^2$ ? (*O. R. M. – 1999*)

**8.** Din cubuleţe de latură 1 se construieşte un cub de latură 45. În cubul obţinut 1998 de cubuleţe sunt populate de bacterii. În fiecare secundă bacteriile se extind în orice alt cubuleţ, care are cel puţin trei feţe comune cu cubuleţele deja populate. Este posibil ca bacteriile să ocupe toate cubuleţele? (*O. R. M. – 1998*)

**9.** Într-o şcoală primară rurală învaţă 20 de copii. Fiecare doi copii au cel puţin un bunic comun. Să se demonstreze că unul dintre bunici are în această şcoală cel puţin 14 nepoţi. (*O. R. M. – 1996*)

**10.** În timpul unei bătălii comune fiecare dintre cei 2001 de cocoşi a rupt câte o pană de la un alt cocoş şi fiecare cocoş a rămas fără o pană. Se ştie că printre oricare

3 cocoşi se găseşte unul care nu a rupt nici o pană de la ceilalţi doi. Să se determine cel mai mic număr $k$ cu proprietatea: tăind cel mult $k$ cocoşi putem aşeza ceilalţi cocoşi în două coteţe astfel încât nici un posesor de pană străină să nu nimerească în acelaşi coteţ cu stăpânul penei. (*O. R. M. – 2001*)

## Soluţiile problemelor

**1.** Scriem egalitatea (1) sub forma

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right].$$

După reducerea termenilor obţinem

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]. \qquad (2)$$

Pentru orice $2\le k\le n-1$ avem $\left[\frac{n}{k}\right]\ge\left[\frac{n-1}{k}\right]$. Deci,

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n-1}\right]\ge\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right]. \qquad (3)$$

Presupunem adevărată egalitatea (1), deci şi (2). Dacă $n$ este un număr compus şi $n=ab$, $2\le a<n$, atunci $\left[\frac{n}{a}\right]=b>\left[\frac{n-1}{a}\right]=b-1$. Ca urmare, inegalitatea (3) este strictă, ceea ce contrazice (2).

Reciproc, fie $n$ un număr prim. Atunci pentru orice $2\le k\le n-1$ avem $n=kt+r$ cu $t,r\in\mathbb{N}$ şi $1\le r<k$. În acest caz $\left[\frac{n}{k}\right]=t=\left[\frac{n-1}{k}\right]$. Prin urmare, egalitatea (2), deci şi (1), este adevărată.

**2.** Dacă $m<n$, atunci $\sqrt[n]{m}<\sqrt[n]{n}<\sqrt[m]{n}$. Pentru $m>n$ avem $\sqrt[m]{n}<\sqrt[n]{n}<$ $<\sqrt[n]{m}$. Deci, $\min\{\sqrt[m]{n},\sqrt[n]{m}\}\le\sqrt[n]{n}$, oricare ar fi $m,n\ge 2$. Vom demonstra prin inducţie că pentru orice $n\ge 2$ avem $\sqrt[n]{n}\le\sqrt[3]{3}$ sau $n^3\le 3^n$. Pentru $n=2$ şi $n=3$ inegalitatea este adevărată. Presupunem că ea este adevărată pentru $k\ge 3$. Atunci

$$(k+1)^3=k^3+3k^2+(3k+1)\le k^3+k^3+k^3=3k^3\le 3\cdot 3^k=3^{k+1},$$

ceea ce finalizează demonstraţia. Deci, pentru orice $m,n\ge 2$ avem $\min\{\sqrt[m]{n},\sqrt[n]{m}\}\le$ $\sqrt[3]{3}$.

**3.** Numărul $k$ este o rădăcină a polinomului $P(P(X))$, dacă el este o soluţie a uneia din ecuaţiile $P(x)=\alpha_i$, unde $i=1,2,\dots,n$. Să arătăm că $P(k)\ne\alpha_i$, oricare ar fi $k\in\mathbb{Z}$ şi $i\ge 2$.

Presupunem că există $k\in\mathbb{Z}$ astfel încât $P(k)=\alpha_2$. Atunci $k\ne 0$. Din enunţ rezultă că polinomul $P(X)$ are forma $P(X)=aX(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)\cdots(X-\alpha_n)$ cu $a\in\mathbb{Z}^*$. Prin urmare, $ak(k-\alpha_2)(k-\alpha_3)\cdots(k-\alpha_n)=\alpha_2$. Relaţia $k\mid\alpha_2$ implică $\alpha_2=kt$, $t\in\mathbb{Z}^*$. Dar $ak(1-t)(k-\alpha_3)\cdots(k-\alpha_n)=t$ implică $(1-t)\mid t$.

Rezultă că $t=2$, pentru care avem $ak(k-\alpha_3)(k-\alpha_4)(k-\alpha_5)\cdots(k-\alpha_n)=-2$. Observăm că numerele $k$, $k-\alpha_3$, $k-\alpha_4$ şi $k-\alpha_5$ sunt distincte. Dar numărul $-2$ nu poate fi scris ca produs de câteva numere întregi, dintre care cel puţin patru să fie distincte. Deci, presupunerea făcută este falsă şi $P(k) \neq \alpha_i$, oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$ şi $i \geq 2$.

Deci, rădăcinile întregi ale polinomului $P(P(X))$ sunt soluţiile întregi ale ecuaţiei $P(x) = 0$, adică numerele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

**4.** Fie $E$ şi $F$ punctele de tangenţă a dreptei $AB$ cu cercurile înscrise respectiv în triunghiurile $ADC$ şi $BCD$. Aplicând teorema lui Pitagora, avem

$$AC^2 - BC^2 = (AC^2 - CD^2) - (BC^2 - CD^2) = AD^2 - BD^2 =$$
$$(AD - BD)(AD + BD) = (AD - BD) \cdot AB.$$

Înlocuind valorile date, obţinem că $AD - BD = 4$.

Pe de altă parte, avem $DE = DM$, $DF = DN$ şi $CD + AD = 2DM + AC$, $CD + BD = 2DN + BC$. De aici rezultă că

$$AD - BD = 2DM + AC - 2DN - BC = 2(DM - DN) + 2.$$

Prin urmare, $2(DM - DN) = AD - BD - 2 = 2$. Rezultă că $MN = 1$.

**5.** Observăm că $\triangle BNX \sim \triangle YNC$. Presupunem că $BX \geq CY$. Atunci $XN \geq NC$ (menţionăm că $XN = NC$, dacă şi numai dacă $BX = CY$). Considerăm pe $[XN]$ punctul $P$ astfel încât $NP = NC$. Atunci: $S_{BNP} = S_{BCN}$, $S_{YPN} = S_{YNC}$, $S_{BPX} \geq S_{YXP}$ (egalitatea are loc doar în cazul când $BX = CY$). Din trapezul $XBCY$ avem $S_{XNY} = S_{BCN}$. Prin urmare,

$$S_{BNX} + S_{YNC} = S_{BPX} + S_{BNP} + S_{YNC} \geq$$
$$S_{YXP} + S_{BCN} + S_{YPN} = S_{XNY} + S_{BCN} = 2\,S_{XNY}.$$

Rezultă că $S_{XNY} \leq \dfrac{1}{4}\,S_{XBCY}$. Prin analogie, se arată că $S_{XYM} \leq \dfrac{1}{4}\,S_{AXYD}$. Ca urmare,

$$S_{XNYM} = S_{XNY} + S_{XYM} \leq \frac{1}{4}\,(S_{XBCY} + S_{AXYD}) = \frac{1}{4}\,S_{ABCD}.$$

Dacă $BX = CY$, atunci aria este maximă: $S_{XNYM} = \dfrac{1}{4}\,S_{ABCD} = \dfrac{1}{4}$.

**6.** Din enunţ rezultă că suma încasată este de $n^2$ lei. Fie $n = 10a + b$, unde $a, b \in \mathbb{N}$, $0 \leq b < 10$. Atunci $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 20a(5a + b) + b^2$. Fraţii au luat în total un număr impar de câte 10 lei. Rezultă că numărul zecilor numărului $n^2$ este impar, ceea ce implică $b^2 = 16$ sau $b^2 = 36$. În ambele cazuri restul este egal cu 6. Deci, ultima dată fratelui mai mic i-a revenit 6 lei, cu 4 lei mai puţin decât fratelui mai mare. Deoarece împărţirea a fost corectă, rezultă că preţul briceagului este de 2 lei.

**7.** Se ştie că pentru orice număr natural $m$ cu descompunerea canonică $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, numărul divizorilor (pozitivi) distincţi ai numărului $m$ este egal cu $d(m) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$ (se demonstrează prin inducţie în raport cu numărul $k$ de factori primi).

Scriem descompunerea canonică a numărului $n = 2^\alpha 3^\beta p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}$, unde $p_1, \ldots, p_k$ sunt factori primi distincţi şi diferiţi de 2 şi 3 cu exponenţi întregi $\alpha, \beta \geq 0$, $\gamma_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, k)$. Atunci, numărul divizorilor (pozitivi) distincţi ai numărului $2n^2 = 2^{2\alpha+1} 3^{2\beta} p_1^{2\gamma_1} \cdots p_k^{2\gamma_k}$ este egal cu

$$d(2n^2) = (2\alpha + 2)(2\beta + 1)(2\gamma_1 + 1) \cdots (2\gamma_k + 1).$$

Analog, avem

$$d(3n^2) = (2\alpha+1)(2\beta+2)(2\gamma_1+1)\cdots(2\gamma_k+1),$$
$$d(6n^2) = (2\alpha+2)(2\beta+2)(2\gamma_1+1)\cdots(2\gamma_k+1).$$

Notăm $c = (2\gamma_1+1)\cdots(2\gamma_k+1)$. Din condiţiile problemei avem

$$\begin{cases} (2\alpha+2)\,(2\beta+1)\,c = 28 \\ (2\alpha+1)\,(2\beta+2)\,c = 24 \end{cases}. \tag{4}$$

Numărul $c$ este un divizor comun al numerelor 28 şi 30. În plus, $c$ este impar. Deci, $c = 1$. Sistemul (4) pentru $c = 1$ are soluţia în numere naturale $\alpha = 1$, $\beta = 3$. Rezultă că $d(6n^2) = (2\alpha+2)(2\beta+2)c = 32$.

**8.** După ocuparea de către bacterii a unui cubuleţ nou numărul feţelor cubuleţelor de pe frontieră ale volumului ocupat de bacterii nu creşte. Numărul maxim al feţelor de acest fel este egal cu $1998 \times 6 = 11988$, iar numărul feţelor cubuleţelor de frontieră ale cubului construit este egal cu $45 \times 45 \times 6 = 12150$. Deci, bacteriile nu pot ocupa toate cubuleţele.

**9.** Notăm cu $A$ şi $B$ cei doi bunici ai unui elev oarecare. Fie $X$ mulţimea elevilor care au $A$ şi $B$ ca bunici. În condiţiile problemei, restul elevilor vor avea ca unul dintre bunici sau pe $A$ sau pe $B$. Fie $Y$ şi $Z$ mulţimile acelora pentru care $A$ şi respectiv $B$ este bunic. Notăm cu $C$ al treilea bunic al unui elev din mulţimea $Y$ (primul bunic fiind $A$). Ca urmare, toţi elevii din $Z$ vor avea ca bunici $B$ şi $C$. În acelaşi mod, deducem că şi toţi elevii din $Y$ au pe $C$ ca bunic. Aşadar, există doar trei bunici: $A$, $B$, $C$. Dacă $a$, $b$, $c$ notează numărul de nepoţi pe care îi are în acea clasă $A$, $B$ şi respectiv $C$, rezultă că $a + b + c = 40$. Observăm că $a \le 13$, $b \le 13$, $c \le 13$ implică $a + b + c \le 39 < 40$. Deci, măcar unul dintre $a$, $b$, $c$ este $\ge 14$, adică măcar un bunic are 14 nepoţi.

**10.** Vom spune că $n\,(n > 1)$ cocoşi formează un $n$-ciclu, dacă ei pot fi aranjaţi astfel încât primul cocoş a rupt o pană de la al doilea, al doilea a rupt o pană de la al treilea etc., iar ultimul cocoş a rupt o pană de la primul. Astfel, mulţimea cocoşilor poate fi partiţionată în cicluri.

Toţi cocoşii din orice $n$-ciclu par ($n$ este număr par) se aşază în coteţe astfel: cocoşii cu un număr de ordine par într-un coteţ, iar cei cu număr de ordin impar în celălalt.

Pentru orice $n$-ciclu impar ($n$ este un număr impar) este necesar şi suficient să tăiem un cocoş, de exemplu, ultimul. În acest caz ceilalţi cocoşi se aşază în două coteţe după metoda precedentă. Menţionăm că din ipoteză rezultă că nu există nici un 3-ciclu de cocoşi.

Deoarece $2001 = 5 \times 400 + 1$, rezultă că nu există mai mult de 400 cicluri impare. Dar deoarece un cocoş nu poate forma un ciclu, rezultă că există cel mult 399 de cicluri impare (de exemplu, 399 de 5-cicluri şi un 6-ciclu).

Prin urmare, se pot tăia oricând cel mult $k = 399$ de cocoşi (câte unul în ciclurile impare), pentru a aşeza ceilalţi cocoşi conform cerinţelor din enunţ.