

2. Notăm cu  $a_k$  cel mai mare divizor impar al numărului natural nenul  $k$ . Demonstrați că  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \geq \frac{n!}{2^{n-1}}$ , oricare ar fi numărul natural nenul  $n$ . Pentru care valori ale lui  $n$  se atinge egalitatea?

3. Fie  $a$  și  $b$  două numere complexe astfel încât  $|a| > 1$ ,  $|b| > 1$  și  $|a + b| > 1$ . Arătați că  $|z - a| + |z - b| + |z + a + b| > 3$ , oricare ar fi  $z \in \mathbb{C}$  cu  $|z| < 1$ .

*Gheorghe Iurea*

### Clasa a XI-a

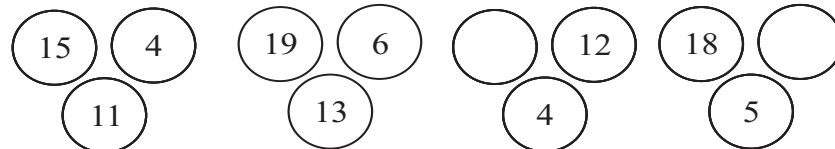
- Determinați matricele  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  care au proprietatea că  $A^2 = O_3$ .
- Funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este monotonă și are proprietatea că  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(2x) - f(x)) = 0$ . Arătați că  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(ax) - f(x)) = 0$ , oricare ar fi numărul real pozitiv  $a$ .
- Șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  are toți termenii egali cu 1 sau cu 2 și are proprietatea că, pentru fiecare număr întreg  $n \geq 1$ ,  $|a_1 + a_2 + \dots + a_n - n\sqrt{2}| < \frac{1}{2}$ . Demonstrați că nu există numere naturale  $n_0 \geq 1$  pentru care șirul  $(a_n)_{n \geq n_0}$  să fie periodic.

## Concursul de matematică „Florica T. Câmpan”

Ediția a XV-a, Iași, 28 februarie 2015

### Clasa I

1. a) Descoperă regula și completează corespunzător:



- b) Micșorând vecinii unui număr cu 3, obținem 4 și 6. Care este numărul?  
 c) Ionuț folosește de 17 ori cifra 7 în scrierea unui șir crescător de 16 numere naturale mai mici decât 100. Care ar putea fi cel mai mic număr din șir? Dar cel mai mare? Scrieți și voi un astfel de șir!

2. a) În urmă cu trei ani, Mirela și Ioana aveau împreună 18 ani. Câți ani au împreună acum?

b) Dacă din cel mai mare număr mai mic decât 30 scazi cel mai mic număr mai mare decât 20, vei afla vârsta Mariei. Ce vârstă are Maria?

3. a) O vrăbiuță sare de 10 ori în 60 de secunde. Fiecare săritură măsoară 5 cm. În câte secunde va parcurge 25 cm?

b) Într-un șir sunt 16 băieți și fete. La fiecare capăt de șir se află câte un băiat. Ei sunt așezați astfel: un băiat - două fete, un băiat - două fete și așa mai departe. Câte fete sunt în șir? Dar băieți?

### Clasa a II-a

1. a) Determinați numerele  $\overline{ad2}$ ,  $\overline{a9b}$ ,  $\overline{2dc}$ ,  $\overline{ade}$ ,  $\overline{3ff}$  știind că sunt numere pare consecutive, în ordine crescătoare.

b) Se consideră șirul format din numerele care conțin numai cifrele 0, 1 și 2, scrise în ordine crescătoare: 0, 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, ... Câte numere de trei cifre conține șirul?

2. a) Dan, Ion și Florica colecționează timbre. Ei au clasoare identice. Florica observă că ei îi mai sunt necesare 20 timbre, lui Dan îi mai sunt necesare 18 timbre și lui Ion îi mai trebuie 16 timbre pentru ca fiecare să-și completeze clasorul. Ea mai observă că, dacă ar da toate timbrele pe care le are celorlalți doi, aceștia ar avea clasoarele complete. Câte timbre sunt într-un clasor complet? Câte timbre are fiecare?

b) În clasele a II-a dintr-o școală sunt 80 de elevi. Cum pot fi alcătuite clasele, dacă numărul elevilor din fiecare clasă este cel puțin 25 și cel mult 30?

3. Am scris toate numerele naturale de două cifre pe câte un cartonaș și am pus cartonașele într-o cutie. Câte cartonașe trebuie extrase, fără a ne uita la ele, pentru a fi siguri că am extras cel puțin două cartonașe cu numere având aceeași sumă a cifrelor?

### Clasa a III-a

1. a) Dacă  $3a + b = 11$  și  $2b + c = 8$ , calculați  $6a + 8b + 3c$ .

b) Mă gândesc la un număr. După ce îi adaug cifra zero la sfârșit, îl micșorez cu dublul numărului inițial și obțin 64. La ce număr m-am gândit?

2. a) Mama are de cinci ori vârsta fiicei, iar împreună au 36 de ani. Peste câți ani mama va avea de patru ori vârsta fiicei?

b) Pentru a câștiga mâna fetei de împărat, Făt-Frumos a primit următoarea poruncă:

– Să-mi aduci două zile la rând câte un buchet de trandafiri, fiecare cu cel puțin 17 și cel mult 31 de trandafiri! În fiecare dintre buchete, trandafirii galbeni să fie de șase ori mai puțini decât cei albi și roșii la un loc, iar cei roșii de două ori mai puțini decât cei albi! Să nu-mi aduci în ambele zile același număr de trandafiri!

Cum va proceda Făt-Frumos, dacă vrea să obțină mâna fetei de împărat?

3. Spunem că un număr natural de trei cifre este *simpatîc* dacă diferența a două dintre cifrele sale este 8.

a) Găsiți trei numere simpatice.

b) Câte numere simpatice există?

### Clasa a IV-a

1. a) Determinați cel mai mare număr format din cifre distincte, care este mai mic decât numărul 333333.

b) Lia așază un număr de mărtișoare, în mod egal, mai întâi în 4 cutii, apoi în 5 cutii. Prima dată rămân două mărtișoare în afara cutiilor iar a doua oară rămân trei mărtișoare în afara cutiilor. Numărul mărtișoarelor din fiecare cutie este, în primul caz, cu 5 mai mare decât numărul mărtișoarelor din fiecare cutie în cel de-al doilea caz. Câte mărtișoare are Lia?

2. În turneul de șah *Hasdeenii* au participat, la categoria 10-12 ani, un număr de 16 șahiști. Cel care pierde este eliminat din joc. În primele două runde s-au jucat câte 8 partide, în următoarele două câte 4 partide, iar în ultimele două runde s-au jucat două, respectiv o partidă, desemnându-se câștigătorul.

a) Câte partide s-au jucat în întregul turneu?

b) Ce loc a obținut jucătorul care a câștigat patru partide?

3. Se consideră 40 de cărți de joc: patru cu valoarea 1, patru cu valoarea 2, patru cu valoarea 3, ..., patru cu valoarea 10. Toate cărțile se împart la întâmplare, în mod egal, între doi jucători. Fără a se uita la cărțile pe care le are, pe rând, fiecare așază câte o carte pe masă, cu fața în sus. Dacă la un moment dat unul dintre jucători observă pe masă câteva cărți cu suma 15, el poate elimina din joc acel grup de cărți. Câștigă cel care a eliminat mai multe astfel de grupe.

Denisa și Dorel joacă acest joc. Spre final, pe masă rămâne o singură carte, cu valoarea 9. Denisa mai are în mână două cărți având valorile 3 și 5, iar Dorel are în mână o singură carte. Ce valoare are cartea din mâna lui Dorel?

*Cătălin Budeanu*

### Clasa a V-a

1. a) Arătați că numărul  $1 + 3 + 5 + \dots + 2015$  este pătrat perfect.

b) Aflați care este ultimul termen al sumei  $1 + 3 + 5 + \dots + n$ , știind că suma este egală cu 10000000000.

2. O pereche ordonată de numere naturale nenule  $(a, b)$  se numește *pereche specială* dacă numărul  $3^a + 7^b$  se divide cu 10.

a) Câte perechi speciale de forma  $(a, 2015)$ , unde  $a < 2015$ , există?

b) Dacă  $(a, b)$  este pereche specială, arătați că și  $(b, a)$  este pereche specială.

*Dorel Luchian*

3. În Fruitsland, țara lui Natural-Juice Împărat, sunt livezi cât vezi cu ochii și discuțiile tot despre pomii fructiferi se poartă. Într-o zi, în Piața Centrală din Fruitsburg, capitala țării, mai mulți piețari care vindeau portocale și mere stăteau de vorbă:

– Eu am o livadă cu portocali, care e cât un sfert din livada cu portocali a împăratului, zicea piețarul Bebe, care vindea portocale.

– Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, spunea altul către Bebe.

– Livada mea cu portocali e doar jumătate cât a ta, se adresa al treilea vorbitorului dinaintea lui.

– Livada mea cu portocali e chiar cât a ta și toți cei care am vorbit avem la un loc exact 4000 de portocali, a concluzionat ultimul către vorbitorul dinaintea lui.

Aprins de subiectul discuției și foarte mândru de sine, Bebe a revenit și s-a lăudat:

– Eu mai am și o livadă cu meri, care e și ea cât un sfert din livada cu meri a împăratului.

– Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, a spus altul către Bebe.

– Livada mea cu meri e doar jumătate cât a ta, i-a replicat altul celui de dinainte.

Și tot așa, această a doua discuție a continuat și nimeni nu mai știe câți vorbitori au fost dar se știe că, până la ultimul vorbitor, fiecare a spus că livada lui cu meri e doar jumătate cât a celui care a vorbit înaintea lui, în timp ce ultimul dintre vorbitori a zis către penultimul:

– Livada mea cu meri e chiar cât și a ta și toți cei care am vorbit acum despre livezi cu meri avem la un loc exact 4096 de meri.

a) Câți portocali sunt în livada cu portocali a lui Natural-Juice Împărat?

b) Câți meri sunt în livada cu meri a lui Natural-Juice Împărat?

*Silviu Boga*

## **Clasa a VI-a**

**1.** Avem la dispoziție o riglă negradată și un raportor de pe care s-au șters toate gradațiile, cu excepția celei care indică unghiul de  $17^\circ$ . Prezentați câte un procedeu pentru a desena unghiuri având măsurile de:

a)  $85^\circ$ ; b)  $10^\circ$ ; c)  $13^\circ$ .

**2.** Când conduce, tata merge întotdeauna cu viteza de 90 km/h atunci când drumul coboară, cu 60 km/h atunci când drumul urcă și cu 72 km/h atunci când parcurge porțiuni orizontale de drum.

Mergând în excursie la munte, tata are nevoie de cinci ore pentru a ajunge din Iași în stațiune și de patru ore pentru întoarcerea din stațiune în Iași (atât la dus, cât și la întoarcere, se merge fără opriri și pe același traseu). Determinați distanța pe care o parcurge tata dus-întors.

**3.** Două supermarketuri vindeau lapte DELICIOS la același preț. Într-o zi de sâmbătă, au fost stabilite următoarele promoții: primul supermarket anunță o reducere de preț de 20% iar al doilea, la fiecare trei cutii cumpărate, oferă o a patra cutie gratuit. Bianca merge la primul supermarket, iar David la al doilea. Ei cumpără această marcă de lapte, luând fiecare același număr de cutii și plătind aceeași sumă totală. Câte cutii a cumpărat fiecare?

*Ciprian Baghiu*

## **Clasa a VII-a**

**1.** În vârfurile unui triunghi, în mijlocul fiecărei laturi precum și în centrul său de greutate se scriu numere naturale astfel încât suma numerelor asociate oricăror trei puncte coliniare să fie 17. Câte modalități de scriere a numerelor există?

**2.** Un pătrat de latură  $n$  este format din pătrățele de latură 1. Parcurgem toate pătrățelele unitate, rând cu rând, fiecare rând de la stânga la dreapta și rândurile

fiind parcurse de sus în jos. Marcăm primul pătrățel, lasăm două nemarcate, apoi marcăm trei, lasăm patru nemarcate ș.a.m.d. O secvență de pătrățele consecutive marcate sau nemarcate poate conține pătrățele de pe rânduri consecutive și, dacă o secvență de pătrățele care ar trebui marcate nu poate fi, în final, încheiată, se renunță la marcarea sa.

- a) Dacă pătratul desenat conține nouă pătrățele marcate, determinați latura sa.
- b) Dacă pătratul desenat conține  $n^2$  pătrățele marcate,  $n \geq 2$ , determinați cel mai mic număr natural  $n$  pentru care ultimul pătrățel de pe ultimul rând este marcată.
- c) Dacă pătratul desenat conține  $2k + 1$  pătrățele marcate,  $k \geq 2$ , demonstrați că există un rând care are toate pătrățelele marcate.

*Claudiu-Ștefan Popa*

**3.** Un țăran are o bucată de pământ de formă triunghiulară pe care trebuie să o împartă în două parcele de arii egale. Casa țăranului (pe care o vom considera ca fiind un punct) este situată pe una dintre laturi și trebuie să se învecineze cu ambele parcele. Arătați cum poate împărți țăranul terenul în fiecare dintre următoarele situații:

- a) casa este mijlocul uneia dintre laturi;
- b) casa nu este mijlocul niciunei laturi.

*Doru Buzac*

### Clasa a VIII-a

1. a) Determinați numărul natural nenul  $n$  pentru care  $\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 7} + \frac{2^3}{7 \cdot 15} + \dots + \frac{2^n}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} < 0,999$ .
- b) Dacă  $x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$ , calculați valoarea expresiei

$$E(x) = \sqrt{x(x+2)+1} + \sqrt{x(x-1)+\frac{1}{4}}$$

**2.** Două vase, unul în formă de cub cu latura  $x$  dm și unul în formă de paralelipiped dreptunghic cu lungimea 9 dm, lățimea 4 dm și înălțimea 10 dm, sunt așezate pe o masă și comunică în partea inferioară printr-o conductă cu capacitatea de 5 litri.

- a) Dacă latura cubului este  $x = 8$  dm și se toarnă în vasul cubic 505 litri de apă, aflați înălțimea la care se ridică apa în cele două vase.
- b) Aflați latura cubului astfel încât, atunci când cubul este plin, cantitatea de apă din cele două vase să fie aceeași.

**3.** Într-o țară cu 64 de orașe, o companie aeriană are 2000 de rute (tur-retur). Demonstrați că, utilizând rutele companiei, din orice oraș se poate ajunge în oricare altul.