# CONCURSURI ŞI EXAMENE

## Concursul de matematică ,,Al. Myller"
## Ediţia a XII-a, Iaşi, 23 ianuarie 2014

### Clasa a V-a

**1.** Se consideră numărul $N = 4^{2014} \cdot 5^{4032} + 18290$.
a) Determinaţi primele trei cifre şi ultimele trei cifre ale lui $N$.
b) Arătaţi că numărul $N$ este divizibil cu $2, 3, 5$ şi $10$.
c) Demonstraţi că $N$ nu este pătrat perfect.

**2.** Demonstraţi că $10^n$ se poate scrie ca sumă a două pătrate perfecte nenule, oricare ar fi numărul natural nenul $n$.

**3.** Se consideră $n$ numere naturale consecutive astfel încât produsul tuturor resturilor nenule obţinute la împărţirile celor $n$ numere prin 5 este egal cu $3^{200} \cdot 4^{301}$. Determinaţi valorile posibile ale numărului $n$. (*Marius Ghergu*)

### Clasa a VI-a

**1.** a) Se consideră mulţimea $A = \{a, a+1, \ldots, a+9\}$, unde $a$ este un număr natural oarecare. Găsiţi trei submulţimi $B, C, D$, fiecare cu câte trei elemente, astfel încât $B \cup C \cup D = A$, $B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$, iar suma elementelor fiecăreia dintre mulţimile $B, C$ şi $D$ să fie aceeaşi.
b) Împărţiţi mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, 2013\}$ în trei submulţimi disjuncte două câte două, fiecare având acelaşi număr de elemente şi aceeaşi sumă a elementelor.

**2.** Un triunghi are lungimile laturilor numere naturale şi suma acestor lungimi este egală cu 10. Demonstraţi că triunghiul nu este echilateral, dar este isoscel.

**3.** a) Găsiţi 16 numere naturale astfel încât suma oricăror nouă dintre ele nu se divide cu 9.
b) Daţi exemplu de opt numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$ cu proprietatea că produsul oricăror două nu este pătrat perfect.
c) Demonstraţi că, din 81 de numere de tipul $7^a \cdot 11^b \cdot 13^c$, putem alege patru astfel încât produsul lor este putere a patra a unui număr natural.

### Clasa a VII-a

**1.** Demonstraţi că nu există numere întregi distincte $a, b$ şi $c$ pentru care $\{a, b, c\} = \{a-b, b-c, c-a\}$. (*Cosmin Manea* şi *Dragoş Petrică*)

**2.** În interiorul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctul $E$, astfel încât $E$ să nu se afle pe diagonala $BD$. Dreapta $BE$ intersectează dreptele $AD$ şi $CD$ în $M$, respectiv în $N$. Dreapta $DE$ intersectează dreptele $AB$ şi $BC$ în $P$, respectiv în $Q$. Demonstraţi că dreptele $MP$ şi $NQ$ sunt paralele.

**3.** Pe latura $AD$ a pătratului $ABCD$ se consideră punctul $N$ astfel încât $AD = 4 \cdot AN$, iar pe latura $AB$ se consideră un punct $M$. Demonstraţi că $M$ este mijlocul segmentului $AB$ dacă şi numai dacă $NM$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle ANC$.

## Clasa a VIII-a

**1.** Un şoricel vrea să mănânce un caşcaval de formă cubică, format din 1001 cubuleţe de latură 1. După ce termină un cubuleţ, poate trece doar la un altul care are o faţă comună cu cel abia terminat. Poate şoricelul să mănânce tot caşcavalul, astfel încât cubuleţul din centru să-i rămână ultimul, ca desert?

(*Gabriela Zanoschi*)

**2.** Numerele reale pozitive $x, y$ şi $z$ au proprietatea că produsul oricăror două este cel mult egal cu 1. Demonstraţi că

$$\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{2+x^2+y^2} + \frac{(1+y^2)(1+z^2)}{2+y^2+z^2} + \frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2+z^2+x^2} \geq \frac{3+xy+yz+zx}{2}.$$

(*Ionuţ Ivănescu* şi *Lucian Tuţescu*)

**3.** Demonstraţi că, pentru orice număr natural $n$ şi orice număr natural impar $k$, numărul $1+2+3+\ldots+n$ divide $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$.

## Clasa a IX-a

**1.** Se consideră triunghiul $ABC$ cu $AB > AC$. Pe segmentul $AB$ se ia punctul $N$ astfel încât $BN = \dfrac{AB+AC}{2}$. Dacă $M$ este mijlocul laturii $BC$, demonstraţi că $MN$ este paralelă cu bisectoarea unghiului $\measuredangle BAC$.

**2.** Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}, 3a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 18, \forall n \in \mathbb{N}$. Demonstraţi că există o infinitate de valori iraţionale ale lui $x$ pentru care toţi termenii şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ sunt numere naturale. (*Radu Miron*)

**3.** Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu raţia pozitivă $r$ şi primul termen $a_1 \geq \frac{1}{2}$. Determinaţi partea întreagă a numărului

$$S_n = \sqrt{1+\frac{r}{a_1a_2}} + \sqrt{1+\frac{r}{a_2a_3}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{r}{a_na_{n+1}}},\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

## Clasa a X-a

**1.** Demonstraţi că $\lg 2 > \dfrac{100}{333}$. (*Gabriel Popa*)

**2.** Afixele vârfurilor unui triunghi echilateral sunt numerele complexe $a, b$ şi $c$. Considerăm numărul complex $z = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-c} + \dfrac{c}{c-a}$. Demonstraţi că partea reală a lui $z$ este $\dfrac{3}{2}$. (*Sven Cortel*)

**3.** Spunem că o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ este ,,aproape identică” dacă există o funcţie $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel încât $f(f(n)) + g(f(n)) = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Dacă funcţia $f$ este aproape identică, arătaţi că funcţia asociată $g$ este definită prin $g(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Daţi exemplu de funcţie aproape identică, alta decât funcţia identică.

c) Demonstraţi că singura funcţie aproape identică şi monotonă este funcţia identică. (*Claudiu Mîndrilă*)

# Concursul de matematică ,,Florica T. Câmpan”

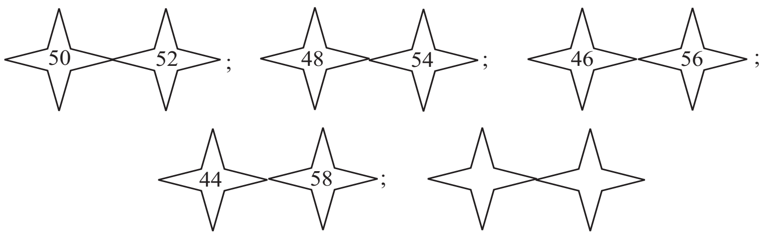
## Ediţia a XIV-a, Iaşi, 26 aprilie 2014

## Clasa I

**I. 1.** Descoperă regula şi completează:

| | |
|---|---|
| 9; 2; 2; 5; | 3; 0; 0; 3; |
| 7; 3; 3; 1; | 8; 4; 4; □; |
| 9; 1; 1; 7; | 7; 2; 2; □. |

**2.** Găseşte regula şi completează perechea de numere care lipseşte din şirul:




**3.** Completaţi cu semnele ,,+” sau ,,−” astfel încât să obţineţi rezultatul:

$$2\square 22\square 22\square 2\square 2\square 22 = 20$$

**II. 1.** George a citit 22 de pagini, depăşind cu două pagini jumătatea cărţii. Câte pagini are cartea?

**2.** Ioana are 10 ani, iar mama sa are 34 de ani. Câţi ani va avea mama când Ioana va avea 25 de ani?

**III. 1.** Pe o cărare de munte urcă 27 de elevi în şir, unul după altul. Ştiind că Bogdan este al 17-lea, iar Ana încheie şirul, să se afle câţi elevi îi despart.

**2.** Ana are un şirag cu 15 mărgele albe şi roşii. Ştim că cele albe sunt de la 5 la 10. Câte mărgele albe sunt? Câte mărgele roşii sunt?