Concursul de matematică "Al. Myller"

Ediţia a IX-a, Iaşi, 2 aprilie 2011

Clasa a VII-a

Problema 1. Fie p un număr natural prim. Determinaţi numărul perechilor (x, y) de numere naturale care verifică egalitatea $\sqrt{x^2+p^4}=y$.

Problema 2. Fie mulţimile

$$A=\left\{(x;y)\mid 0<x\leq y<1; x+y\geq 1; xy\leq \frac{1}{4}\right\},$$
$$B=\left\{(x;y)\mid 0<x\leq y<1; x+y\leq 1; xy\geq \frac{1}{4}\right\}.$$

a) Să se arate că mulţimea A are cel puţin 2011 elemente.

b) Să se determine mulţimea B.

Problema 3. a) Fie $ABCD$ un trapez cu bazele $[AB]$ şi $[CD]$, în care $\{O\}=AC\cap BD$ şi $\{Q\}=AD\cap BC$. Demonstraţi că dreapta OQ conţine mijloacele bazelor trapezului.

b) Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle BAC)=90°$ şi $AB<AC$. Punctele M şi N sunt situate pe laturile $[AB]$ şi respectiv $[AC]$ astfel încât $AM\cdot AB=AN\cdot AC$. Paralela prin punctul M la dreapta BC intersectează $[AC]$ în punctul P. Dacă $\{O\}=BP\cap CM$, arătaţi că $AO\perp MN$.

Problema 4. În interiorul unui pătrat de latură 1 se află un patrulater convex de arie $\frac{1}{2}$. Demonstraţi că există o dreaptă d paralelă cu una dintre laturile pătratului, care intersectează patrulaterul şi determină cu laturile acestuia un segment cu lungimea mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale a cu proprietatea că

$$\left(a^2+2a-3\right)^3+\left(a^2-2a-15\right)^3=8\left(a^2-9\right)^3.$$

Problema 2. Se consideră pătratul $ABCD$ de latură 1. Punctele M, N, P şi Q sunt situate pe laturile $(AB), (BC), (CD)$ şi respectiv (DA). Demonstraţi că perimetrul patrulaterului $MNPQ$ este mai mare sau egal cu $2\sqrt{2}$.

Problema 3. Fie x un număr iraţional. Se ştie că 36 este cel mai mic număr natural nenul cu proprietatea că numărul x^{36} este raţional. Determinaţi numărul de elemente raţionale din mulţimea $A=\{x^{ab}\mid a+b=36, a,b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}\}$.

Problema 4. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară dreaptă. Arătaţi că, dacă dreptele $A'B, B'C$ şi $C'A$ sunt perpendiculare două câte două, atunci $AB = BC = CA = AA' \cdot \sqrt{2}$.

Clasa a IX-a

Problema 1. Fie K, L, M, N mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), respectiv (DA) ale patrulaterului $ABCD$ înscris într-un cerc de centru O. Notăm H_A, H_B, H_C, H_D, ortocentrele triunghiurilor AKN, BLK, CML, respectiv DNM.

a) Arătaţi că $2\overrightarrow{OH_A} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$.

b) Arătaţi că $H_AH_BH_CH_D$ este paralelogram.

Problema 2. Determinaţi numerele întregi a, b pentru care sistemul

$$\begin{cases} x^2 - 2ax - a - 2 = 0 \\ y^2 - 2by - x = 0 \end{cases}$$

are exact trei soluţii în mulţimea numerelor reale.

Problema 3. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale definit prin $a_0 \in (0, 1)$ şi

$$a_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } a_n = 0 \\ \left\{\dfrac{n+1}{a_n}\right\} & \text{, dacă } a_n \neq 0 \end{cases}.$$

Arătaţi că a_0 este iraţional dacă şi numai dacă şirul nu are termeni nuli.

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea că $(x^2 + xy + y^2)(f(x) - f(y)) = f(x^3) - f(y^3)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Clasa a X-a

Problema 1. Să se determine numerele complexe z cu proprietatea că $|z| + |z - 25| + |z - 18 - 24i| + |z + 7 - 24i| = 70$.

Problema 2. Considerăm un punct M în interiorul paralelogramului $ABCD$. Să se arate că $MA \cdot MC + MB \cdot MD \geqslant AB \cdot AD$.

Problema 3. Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geqslant 1}$ se numeşte *convex* dacă

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}, \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2.$$

a) Să se dea un exemplu de şir convex neconstant.

b) Fie $(b_n)_{n\geqslant 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât, oricare ar fi $a > 0$, şirul $(a^n b_n)_{n\geqslant 1}$ să fie convex. Să se demonstreze că şirul $(\ln b_n)_{n\geqslant 1}$ este convex.

Problema 4. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care verifică relaţia $f(f(n)) + f(n) = 6n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Clasa a XI-a

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi fie A o matrice pătratică de ordin n cu elemente întregi, având proprietatea că $I_n + A + A^2 + \cdots + A^{10} = O_n$.

i) Să se arate că matricea $I_n + A + A^2$ este inversabilă.

ii) Să se arate că $\det(I_n + A + A^2) = 1$.

Problema 2. Considerăm un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale, strict descrescător şi convergent la 0, cu proprietatea că $a_{n+1} \leqslant \dfrac{a_n + a_{n+2}}{2}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n) = 0$.

Problema 3. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că există numerele reale $x_1, x_2, \ldots, x_n$ astfel încât matricea

$$A_n = (\sin px_q)_{1\leqslant p,q\leqslant n} = \begin{pmatrix} \sin x_1 & \sin 2x_1 & \sin 3x_1 & \ldots & \sin nx_1 \\ \sin x_2 & \sin 2x_2 & \sin 3x_2 & \ldots & \sin nx_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin x_n & \sin 2x_n & \sin 3x_n & \ldots & \sin nx_n \end{pmatrix}$$

să fie nesingulară.

Problema 4. Fie $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare şi convexă, cu proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - x) = 0$. Să se demonstreze că pentru orice număr $x \in [0,\infty)$ avem $2x \leqslant f(f(2x)) \leqslant 2f(x)$.

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe orice interval $[a,b] \subset I$. Să se arate că mulţimea $A = \left\{ \displaystyle\int_x^y f(t)dt \mid x, y \in I \right\}$ este un interval, eventual degenerat.

Problema 2. Fie p un număr prim, $p > 2$. Să se arate că polinomul cu coeficienţi întregi $f = (X-1)(X-2)\cdots(X-p) + X + p$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X]$.

Problema 3. Se consideră funcţia continuă $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) $f(0) < 0 < f(1)$;

b) există un unic număr $c \in (0,1)$ pentru care $f(c) = 0$;

c) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geqslant \int_0^1 xf(x)dx$.

Să se demonstreze că pentru orice număr n natural nenul avem $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx > 0$.

Problema 4. Fie A un inel finit cu proprietăţile:

i) orice divizor al lui zero este element nilpotent;

ii) numărul elementelor inversabile din A şi numărul automorfismelor inelului A sunt relativ prime.

Să se arate că:

1° Pentru orice element inversabil $a \in A$, funcţia $f_a : A \to A$, $f_a(x) = axa^{-1}$ este un automorfism al inelului A;

2° Inelul A este comutativ.