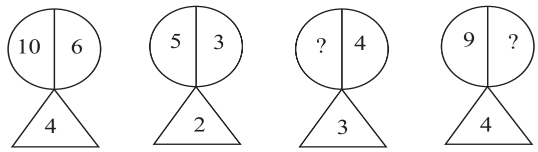
Concursul de matematică "Florica T. Câmpan"

Ediţia a XI-a, Iaşi, 2011

Etapa judeţeană, 20 februarie 2010

Clasa I

1. Găsiţi regula şi completaţi cu numerele care lipsesc:

a) 

b)
0; 2; 4;
2; 4; 6;
4; 6; 8;
$\square$; $\square$; $\square$;
$\square$; $\square$; $\square$.

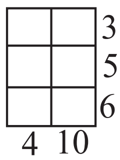
c) $1, 2, 4, 3$; $5, 6, 8, 7$; $\square, \square, \square, \square$.

2. Bogdan are cu 3 timbre mai mult decât Radu, iar Radu are cu 10 mai puţine decât Mihai, care are 20 de timbre. Câte timbre are Bogdan?

3. Cătălin se joacă în scara blocului astfel: urcă 3 trepte, coboară două, urcă apoi 4 trepte, coboară una, urcă 5 trepte şi coboară două. Câţi paşi a făcut Cătălin şi câte trepte a urcat?

Clasa a II-a

1. a) Completaţi în toate modurile posibile dreptunghiul alăturat cu numere diferite de 0, astfel încât suma numerelor pe fiecare linie şi pe fiecare coloană să fie egală cu numărul indicat în dreptul liniei, respectiv coloanei.

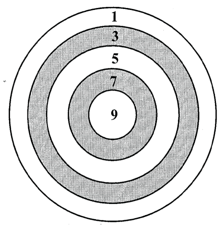


b) Într-o şcoală, elevii intră pe baza unui cod format din trei cifre nenule distincte, fără a conta ordinea în care sunt introduse cifrele. Într-una din zile, Claudiu uită cele trei cifre care îi trebuie pentru a intra în şcoală, însă ţine minte că suma celor trei cifre este 12. Aflaţi toate valorile posibile pe care le poate avea codul de acces al lui Claudiu în şcoală.

2. a) După ce Diana a mâncat 6 mere, iar Elena a mâncat 7 mere, le-au mai rămas fiecăreia atâtea mere câte au mâncat la un loc. Câte mere a avut fiecare?

b) Rareş a desenat 24 de figuri geometrice, pătrate şi cercuri, astfel încât fiecare pătrat să conţină trei cercuri. Ştiind că în fiecare cerc desenează câte un trandafir şi în fiecare pătrat câte două garoafe, aflaţi câte flori a desenat Rareş.

3. Vlăduţ aruncă şase săgeţi la ţinta din figura alăturată şi nimereşte de fiecare dată într-unul din cercurile ei, câştigând atâtea puncte câte sunt scrise în fiecare cerc.



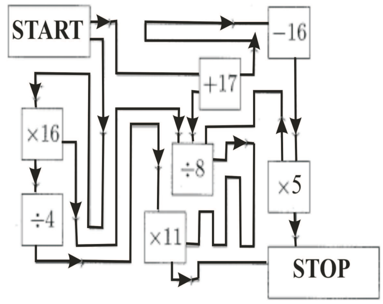
a) Care este cel mai mic scor pe care îl poate obţine Vlăduţ?

b) Care este cel mai mare scor pe care îl poate obţine Vlăduţ?

c) Indicaţi toate modurile posibile prin care poate obţine scorul 10.

Clasa a III-a

1. a) Aflaţi numărul de două cifre căruia îi aparţine replica: "Diferenţa dintre prima şi a doua mea cifră este 1 iar suma lor este 9". Justificaţi!



b) La petrecerile din Împărăţia Numerelor iau parte doar numerele majore, adică cele mai mari decât 50. Cifra 7 doreşte insistent să participe la petrecere; Împăratul Zero îi dă o şansă şi o supune unei probe: "În circuitul din figura alăturată trebuie să porneşti de la START, să efectuezi câteva dintre operaţii, în ordinea arătată de săgeţi şi să obţii un rezultat mai mare de 50. Doar astfel te voi primi la petrecere!" Astfel, cifra 7 intră în circuit, alege un drum şi obţine la STOP rezultatul 55. A câştigat! Puteţi voi găsi la ce operaţii a fost supusă cifra 7 când a parcurs circuitul?

2. a) La o masă pătrată pot sta exact 4 copii, câte unul pe fiecare latură. La o serbare s-au aşezat şapte mese, lipite una lânga alta, astfel încât să formeze o masă lungă, dreptunghiulară. Câţi copii se pot aşeza la masă formată?

b) Copiii din familiile Apostol şi Bălan s-au întâlnit într-o cofetărie, pentru a sărbători o aniversare. Este posibil ca fiecare băiat să aibă exact trei fraţi şi fiecare fată să aibă exact o soră în acea cofetărie? Câţi copii ar fi atunci, de toţi? (Fiecare familie are drept copii şi băieţi şi fete.)

3. Bancomatul jucărie din şcoala mea îmi permite să extrag "sume" doar în jetoane de 2 euro şi de 5 euro. Pot scoate cel mult 10 jetoane de 2 euro şi cel mult 5 jetoane de 5 euro.

a) Care este "suma" cea mai mare pe care o pot extrage din bancomat?

b) Descrieţi un mod de a extrage exact 17 euro.

c) Este posibil să scot din bancomat, dintr-o singură extragere, exact 42 euro?

Clasa a IV-a

1. Moş Martin avea în toamna anului 2010 o greutate de 350 de kilograme. Ştiind că vara se îngraşă cu 20 kg, iar iarna slăbeşte cu 10 kg, aflaţi ce greutate avea Moş Martin în toamna anului 2007.

Doina Nechifor

2. Monograma unei persoane este reprezentată de trei litere: iniţiala numelui de familie, iniţiala primului prenume şi iniţiala celui de al doilea prenume (literele alfabetului se consideră a fi $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z$). Domnul şi doamna Câmpan doreau să pună un nume bebeluşului Câmpan astfel încât literele din monograma lui să fie diferite şi în ordine alfabetică. Câte astfel de monograme există?

Alexandru Negrescu

3. Pe planeta Nintendo, pokémonii sunt de patru feluri: de apă, de pământ, de foc şi de noapte. Ei pot avea de la 5 la 7 aripi şi de la 4 la 21 antene. Împăratul lor, Lucian-Georges, vrea să pornească un război împotriva lui Katalin, cumplitul său inamic. Care este numărul minim de pokémoni din armata ce atacă împărăţia lui Katalin, dacă Lucian-Georges vrea să aibă certitudinea că va putea selecta un comando format din 21 de pokémoni identici? (Doi pokémoni se consideră identici dacă sunt de acelaşi fel, au acelaşi număr de aripi şi acelaşi număr de antene.)

Clasa a V-a

1. Cătălin şi Doru au fost în vacanţă în Egipt. În ziua în care au sosit înapoi ei s-au îmbolnăvit de gripă nouă (AH1N1), contaminând multe dintre persoanele cu care au intrat în contact. În fiecare zi, numărul oamenilor care s-au îmbolnăvit este de trei ori mai mare decât în ziua precedentă.

a) Câţi oameni se vor îmbolnăvi în primele 100 de zile?

b) Arătaţi că numărul total al bolnavilor din primele 100 de zile este mai mare ca 2^{150}.

Ciprian Baghiu

2. La o lucrare de control, cei 29 de elevi ai unei clase primesc spre rezolvare un set de trei întrebări. Dacă răspund corect la întrebarea I primesc 1 punct, pentru a II-a întrebare primesc 2 puncte, pentru a III-a întrebare primesc 3 puncte, iar dacă nu dau niciun răspuns corect primesc 0 puncte.

a) Arătaţi că cel puţin cinci elevi au obţinut acelaşi punctaj.

b) Se păstrează concluzia dacă în acea clasă sunt 28 de elevi?

Cătălin Budeanu

3. Suma a 30 de numere naturale pare şi nenule este 328.

a) Daţi un exemplu de numere ce îndeplinesc condiţiile de mai sus, printre care să existe exact o grupă cu patru termeni egali.

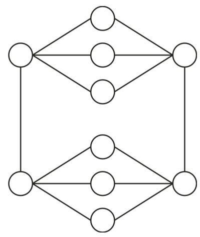
b) Arătaţi că oricum am alege numere care satisfac toate condiţiile problemei, vom avea cel puţin patru numere egale între ele.

Ciprian Baghiu

Clasa a VI-a

1. Păcală şi Tândală au primit bonuri valorice de 11 lei bucata. Într-un supermarket Păcală a cumpărat două pâini, a mâncat 7 cârnciori şi a băut un pahar cu must iar Tândală a cumpărat 3 pâini, a mâncat 5 cârnăciori şi a băut 7 pahare cu must. Păcală a plătit cu un număr întreg de bonuri valorice, fără a primi rest. Arătaţi că şi Tândală poate achita plata totală la fel.

2. Ana desenează pe tablă figura alăturată. Maria alege zece numere din mulţimea $\{0; 1; 2; \ldots ; 14\}$ şi le scrie în cercurile din desen. Luiza scrie pe fiecare segment din desen diferenţa numerelor din cercurile pe care acesta le uneşte (diferenţele sunt numere naturale). Este posibil ca numerele de pe segmente să fie distincte? Justificaţi!



Andrei Nedelcu

3. Elevii Andrei, Bogdan şi Costel joacă ping-pong. Cel care pierde un set lasă loc la masă celui care s-a odihnit. În final Andrei a jucat 13 seturi iar Bogdan 27. Câte seturi a jucat Costel?

Gheorghe Iurea

Clasa a VII-a

1. La un club sportiv sunt înscrişi mai puţin de 70 de elevi. O treime din numărul fetelor reprezintă un sfert din numărul băieţilor. Unii copii joacă volei, ceilalţi joacă handbal. Un sfert din numărul celor care joacă volei reprezintă o cincime din numărul celor care joacă handbal. Ştiind că 17 fete joacă handbal, aflaţi câţi băieţi joacă volei.

Gazeta Matematică 11/2010

2. Despre un număr întreg a vom spune că *are valenţa n* dacă există exact n triplete de numere întregi (x, y, z) astfel încât $-5 \leq x \leq 10$, $-5 \leq y \leq 10$, $-5 \leq z \leq 10$ şi $x - 2y + 3z = a$. Determinaţi valenţele numerelor 50, -50 şi 0.

Claudiu Ştefan Popa şi Gabriel Popa

3. Un copil de clasa a VII-a găseşte un document îngălbenit de vreme care arată locul unde a fost îngropată o comoară pe o insulă: "Caută turnul bisericii T, cascada C, stejarul bătrân S şi stânca diavolului D. Înfige un ţăruş M la mijlocul drumului drept dintre T şi D şi încă unul N la mijlocul drumului drept dintre C şi S. Uneşte prin linii drepte M cu N şi T cu S, marcând locul în care aceste linii se întâlnesc (E). Mergi de la M la E, numărându-ţi paşii, apoi numără tot atâţia paşi în prelungirea liniei MN, începând din N, şi înfige un ţăruş în locul P în care ai ajuns. Comoara se află acolo unde linia dreaptă prin C şi D întâlneşte linia dreaptă prin T şi P."

Ajuns pe insulă, copilul află de la băştinaşi că stejarul bătrân a fost doborât de un trăsnet, cu mulţi ani în urmă. Găseşte însă o hartă veche pe care se vede că $TCSD$ era un trapez cu baza mare TC şi $DS = SO$, unde $\{O\} = ST \cap CD$.

a) Arătaţi că $ST = DS + TC$.

b) Demonstraţi că unghiul SPT este drept.

c) Ajutaţi-l pe elev să găsească locul comorii, chiar în absenţa stejarului bătrân!

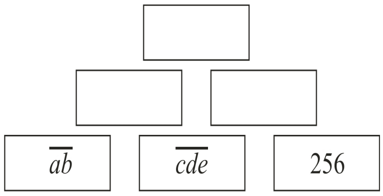
Claudiu Ştefan Popa şi Gabriel Popa

Clasa a VIII-a

1. Ali-Baba şi ai lui 40 de hoţi au strâns de-a lungul timpului o sumă imensă de bani: $\overline{abcde256}$ euro. Pentru că Ali-Baba se temea de hoţi, a pus suma într-un seif la o bancă în Elveţia. Un agent sub acoperire, infiltrat de foarte multă vreme în banda lui Ali-Baba, era cunoscut ca rapper de succes cu numele M-One. Acesta a aflat în scurt timp combinaţia de la seif şi a scris următorul e-mail către colegii din poliţie:

$*** \overline{cde} < 256$

$***$ În fiecare căsuţă este un pătrat perfect şi numărul din fiecare căsuţă este suma numerelor peste care se află



$***$ La vârf este codul:

Sunt pătrat de pătrat
Natural, adevărat
Cel mai mare din o mie
Toată lumea mă ştie.

Cei din poliţie nu s-au descurcat cu mesajul şi l-au trimis la Concursul *Florica T. Câmpan*, sperând ca unul dintre elevi să dezlege enigma. Aflaţi pentru ei codul seifului şi suma din seif.

Marian Panţiruc

2. În vârfurile unui cub se aşează numere naturale şi pe fiecare muchie se aşează media aritmetică a numerelor din capete, de asemenea număr natural.

a) Pot fi cele 20 de numere pare şi distincte două câte două?

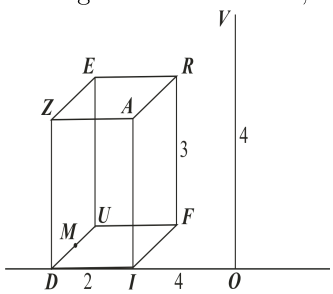
b) Pot fi cele 20 de numere impare şi distincte două câte două?

c) Demonstraţi că nu putem aşeza în acest fel 20 de numere consecutive.

Julieta Grigoraş

3. Un chioşc de ziare are forma unei prisme patrulatere regulate $DIFUZARE$, cu latura bazei de $2m$ şi înălţimea de 3m. Chioşcul este alimentat cu electricitate printr-un fir ce uneşte vârful V al unui stâlp VO înalt de $4m$ cu mijlocul laturii DU (evident, fără a străpunge chioşcul). Ştiind că punctele D, I, O sunt coliniare şi $IO = 4m$, aflaţi lungimea celui mai scurt fir care poate alimenta chioşcul cu energie electrică.

Marian Panţiruc



Etapa interjudeţeană, 26 martie 2011

Clasa a IV-a

1. În timpul vacanţei, Claudiu îşi ajută părinţii lucrând la magazinul familiei. Într-una din zile, la magazin se aduc cutii de compot care au înălţimea de 10 centimetri. Claudiu trebuie să le aranjeze pe o masă unele peste altele: pe primul rând de jos pune 12 cutii, pe rândul al doilea 11 cutii, pe următorul rând 10 cutii şi aşa mai departe.

a) De câte cutii de compot are nevoie Claudiu pentru aranjamentul de pe masă? Ce înălţime va avea acest aranjament?

b) Pentru o altă aranjare a cutiilor, Claudiu se hotărăşte să pună 12 cutii pe primul rând de jos, 10 cutii pe al doilea rând şi aşa mai departe, până ce pune două cutii pe ultimul rând de sus. De câte cutii are nevoie Claudiu? Ce înălţime va avea acest nou aranjament?

2. În pătratul alăturat, produsul numerelor de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare dintre cele două diagonale este acelaşi şi nenul.

2	a	b
9	6	c
d	e	f

a) Aflaţi b.

b) Dacă, în plus, $9f + 2d = 144$, aflaţi şi celelalte numere.

3. Un număr care nu se împarte exact la niciuna din cifrele sale se numeşte *număr civilizat* (precizăm că niciun număr nu se împarte la 0).

a) Arătaţi că numerele 52 şi 354 nu sunt civilizate.

b) Claudiu şi Diana au găsit două numere civilizate care înmulţite dau ca rezultat tot un număr civilizat.

$$\begin{array}{cccc} * & 2 & 3 & * \\ & & * & 9 \\ \hline * & * & * & * \end{array}$$

Reconstituiţi înmulţirea găsită de cei doi copii (steluţele înlocuiesc cifre).

Clasa a V-a

1. O carte ciudată are paginile numerotate astfel: $16, 23, 30, 37, 44, \ldots, 2011$.

a) Aflaţi câte foi are cartea ciudată.

b) Determinaţi câte cifre s-au folosit pentru numerotarea paginilor cărţii ciudate.

c) Calculaţi suma numerelor înscrise pe foaia din mijlocul cărţii.

2. Monica este o învăţătoare foarte serioasă şi iubită de copiii pe care îi învaţă. În clasa la care predă are 10 copii pregătiţi pentru concursuri, dintre care 7 la matematică şi 6 la limba română. La sfârşitul unei săptămâni au loc trei concursuri: sâmbătă unul de matematică şi unul de limba română (la aceeaşi oră), iar duminică unul de matematică. La fiecare concurs ea trimite câte un singur copil. În câte moduri poate alege participanţii la cele trei concursuri?

Ciprian Baghiu

3. a) Arătaţi că numărul 1006009 este pătrat perfect.

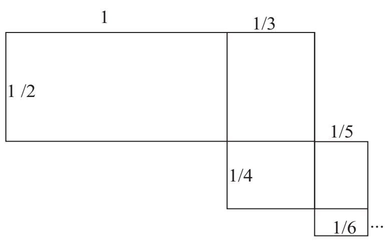
b) Demonstraţi că există măcar 2011 pătrate perfecte care nu au ultima cifră egală cu 0 şi care conţin un număr impar de cifre de 0.

c) Arătaţi că, oricare ar fi cifra b nenulă, numărul $\underbrace{\overline{b\,000\ldots00\,b}}_{2011 \text{ cifre de } 0}$ nu este pătrat perfect.

Cristian Lazăr

Clasa a VI-a

1. Construim succesiv dreptunghiuri vecine, alternativ spre dreapta şi în jos, ca în figura alăturată. (Două dreptunghiuri se numesc vecine dacă au o latură comună.) Laturile dreptunghiurilor au consecutiv lungimile $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.



Arătaţi că există o grupă de două sau mai multe dreptunghiuri vecine două câte două astfel încât suma ariilor acestora să fie $\frac{1}{3}$.

2. Pe o tablă de şah 8×8 se aşează 8 turnuri astfel încât niciunul să nu le atace pe celelalte.

a) Arătaţi că un astfel de aranjament este posibil.

b) Pentru un astfel de aranjament, arătaţi că în orice pătrat 5×5 există cel puţin două turnuri.

3. Demonstraţi că pot fi alese cel mult 671 numere din mulţimea $A = \{1, 2, \ldots, 2011\}$ astfel încât diferenţa oricăror două numere alese să nu dividă suma acestora.

Clasa a VII-a

1. Ioana desenează pe monitorul calculatorului, cu ajutorul unui program de grafică pe computer, un triunghi isoscel ABC şi ia punctele D pe baza (BC) şi E pe latura (AB) astfel încât $\measuredangle ADE \equiv \measuredangle ACB$. Programul folosit îi permite Ioanei să selecteze orice triunghi care apare în desen, să-l mărească sau să-l micşoreze (păstrându-i forma) cu funcţia zoom, să-i schimbe poziţia sau să-l rotească, după dorinţă. Numim transformare o succesiune oarecare de astfel de operaţii.

a) Demonstraţi că Ioana poate găsi o transformare în urma căreia triunghiul DBE să se suprapună exact peste triunghiul ACD.

b) Observând alte transformări urmate de suprapuneri de triunghiuri în configuraţia desenată, Ioana redescoperă *relaţia lui Stewart* pentru triunghiul isoscel: $AB^2 = AD^2 + BD \cdot CD$. Demonstraţi şi voi această relaţie!

Claudiu Ştefan Popa

2. Se consideră numerele raţionale strict pozitive a, b, c, d astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

a) Arătaţi că $\sqrt{ac} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{bd} \in \mathbb{Q}$.

b) Demonstraţi că $\sqrt{(a+b)(c+d)} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{ac} \in \mathbb{Q}$.

c) Este adevărată implicaţia $\sqrt{(a+b)(c+d)} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{ac} \in \mathbb{N}$? Dar reciproca?

Claudiu Ştefan Popa şi Gabriel Popa

3. Considerăm mulţimea $M = \{-1, ; -2; -3; \ldots ; -2011\}$. Pentru fiecare submulţime nevidă A a lui M, calculăm produsul P_A al tuturor elementelor sale; dacă $A = \{a\}$, atunci $P_A = a$.

a) Găsiţi trei submulţimi distincte A, B şi C ale lui M, pentru care $P_A = P_B = P_C$.

b) Care este valoarea cea mai mare pe care o poate lua un astfel de produs? Dar cea mai mică?

c) Calculaţi suma tuturor produselor care se obţin. (Dacă valoarea unui produs se repetă pentru mai multe submulţimi ale lui M, respectiva valoare se va repeta de acelaşi număr de ori şi în sumă.)

Clasa a VIII-a

1. Baronul de Münchhausen spune o obişnuită poveste gogonată despre cum a zburat el pe Lună călare pe o ghiulea trasă dintr-un tun. Oricine şi-ar putea da seama că este o uriaşă minciună, însă puţini puteau şi demonstra acest lucru. În cele din urmă, un copil isteţ de vreo 15 ani a reuşit să afle, studiind diverse specificaţii tehnice, că viteza unei ghiulele ar fi de $200m/s$ şi, conform legilor fizicii, după $t > 0$ secunde de mişcare, ghiuleaua se află la înălţimea $h(t) = -5t^2 + 200t$. Aflaţi şi voi înălţimea maximă la care ar fi putut ajunge baronul Münchhausen şi timpul total al călătoriei sale călare pe ghiulea.

Marian Panţiruc

2. Fie prisma triunghiulară regulată $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ având toate muchiile, precum şi diagonalele feţelor laterale, colorate cu roşu sau cu albastru. În fiecare triunghi care se formează, exceptând bazele, există atât o latură roşie cât şi o latură albastră. Arătaţi că cele şase muchii ale bazelor sunt colorate toate cu aceeaşi culoare.

Gheorghe Iurea

3. Lucian şi Cătălin au vândut împreună, la piaţă, n kilograme carne de curcan, cu valoarea de n euro kilogramul. Ei acţionează succesiv: primul îşi laudă marfa Lucian (până vinde carne în valoare de 10 euro), apoi Cătălin (până vinde şi el în valoare de 10 euro), din nou Lucian etc. Cătălin câştigă la ultima strigare o sumă întreagă, mai mică de 10 euro. Determinaţi acestă sumă.

Doru Buzac şi Gabriel Mîrşanu

Recreaţii ... matematice

Nume de români date unor corpuri cereşti sau unor forme de relief pe acestea

Denumirea corpurilor cereşti (stele, planete, asteroizi, comete etc.) şi a oricărei forme de relief pe acestea este decisă de ***Uniunea Astronomică Internaţională*** (UAI), cu sediul la Paris. În timp ce cometele poartă numele descoperitorilor lor, corpurile şi formele de relief poartă numele unor personalităţi din lumea artelor şi ştiinţei.

1. *Nume româneşti pe planete*

- **Craterul Haret** (*Spiru Haret*, 1851-1912) pe faţa invizibilă a Lunii, cu diametrul de 29,77 km;
- **Craterul Eminescu** pe Mercur, cu diametrul de 125 km;
- **Craterul Văcărescu** (*Elena Văcărescu*, 1866-1947) pe Venus, cu diametrul de 315,5 km;
- **Patera Darclée** (*Hariclea Darclée*, 1860-1939) pe Venus, formaţiune vulcanică numită ”patera” cu diametrul de 15 km;

(*continuare la pag. 75*)