Concursul de Matematică "Al. Myller"
Ediţia a V-a, Iaşi, martie 2007

Clasa a IV-a

1. Dacă $a = 2$ şi $b + c = 5$, calculaţi $a \times b + a \times c$.

2. Suma a două numere este 75. Dacă din primul scădem 45 şi la al doilea adunăm 10, obţinem numere egale. Să se afle cele două numere.

3. Aflaţi $a \times b \times c$, unde b este dublul lui a, a este dublul lui c, iar $a + b + c = 21$.

4. Produsul a 7 numere naturale este 7. Aflaţi suma numerelor.

5. Pentru numerotarea paginilor unei reviste sunt necesare 135 cifre. Câte pagini are revista?

6. Numerele naturale nenule distincte a şi b sunt cele mai mici pentru care împărţirile $a : 2 : 2 : 2 : 2$ şi $b : 2 : 2 : 2 : 2$ se efectuează exact. Aflaţi $a + b$.

7. Aflaţi ce număr se măreşte cu 2007 când adăugăm la dreapta lui cifra 0.

8. Un profesor are un număr de caiete şi jumătate din numărul acestora creioane. Distribuind câte 3 caiete fiecărui elev mai rămân 3 caiete, iar distribuind câte 3 creioane fiecărui elev, rămân 3 elevi fără creioane. Care este numărul elevilor?

9. Albă ca Zăpada şi cei şapte pitici au suma vârstelor 185 de ani. Ştiind că Albă ca Zăpada este cu patru ani mai tânară decât cel mai tânăr pitic, iar vârstele piticilor sunt numere naturale consecutive, aflaţi vârsta Albei ca Zăpada.

10. Setilă bea la o masă obişnuită 5 butoaie de apă, iar când este însetat bea 7 butoaie. Dacă a băut 39 de butoaie, la câte mese a fost Setilă însetat?

11. Ştefan trebuie sa înmulţească numărul 223 cu un număr format din 2 cifre consecutive. Din greşeală, el a schimbat ordinea acestor cifre consecutive şi a obţinut alt produs. Care este diferenţa celor două produse?

12. Primul termen al unui şir de numere naturale este $1 + 2 + 3$, al doilea este $2 + 3 + 4 + 5$, al treilea este $3 + 4 + 5 + 6 + 7$ şi aşa mai departe. Aflaţi valoarea celui de-al 50-lea termen al şirului.

13. Suma a 2 numere A şi B este 150. Dacă ştergem una din cifrele lui A se obţine B. Găsiţi toate numerele A şi B cu această proprietate.

14. O minge se ridică la trei sferturi din distanţa de la care cade. Dacă prima dată i se dă drumul de la 64 metri, care este distanţa totală parcursă de minge până când atinge pământul a patra oară?

15. Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ... , 100. Lucian şi Dana şterg pe rând numerele de pe tablă astfel: mai întâi Lucian şterge numerele de pe locurile impare, apoi Dana şterge numerele de pe locurile pare din şirul rămas. Lucian şterge din nou numerele de pe locurile impare din noul şir şi aşa mai departe. Care este ultimul număr rămas pe tablă?

Clasa a V-a

1. Care sunt elementele mulţimii $A = \{2x \in \mathbb{N} \mid 100 \leq x < 103\}$?

2. Care este paritatea numărului $N = (3n+2)(2n+3)$, dacă n este un număr natural impar?

3. Determinaţi suma celor mai mari două pătrate perfecte impare de trei cifre.

4. Găsiţi numărul natural de două cifre egal cu triplul sumei cifrelor sale.

5. Care este cardinalul mulţimii $M = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 2^x < 1025\}$?

6. Calculaţi suma $S = \dfrac{42}{43} + \dfrac{4242}{4343} + \dfrac{424242}{434343}$.

7. La un concurs se dau 30 de probleme. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 5 puncte, iar pentru fiecare răspuns greşit se scad 3 puncte. Câte răspunsuri corecte a dat un elev care a obţinut 94 de puncte?

8. Scrieţi numărul 200 ca sumă de puteri ale lui 2.

9. Determinaţi toate perechile de numere naturale pentru care $m^2(n+1) = 80$.

10. Care este cea mai mare fracţie de forma $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{x3y}}$ mai mică decât $\dfrac{9}{13}$, cu $\overline{x3y}$ multiplu de 10?

11. Restul împărţirii numărului $3a+b$ la 23 este 11, iar câtul este c. Stabiliţi paritatea câtului împărţirii lui $3a+b-c$ la 11.

12. Fie numărul $n = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{99999\cdots99}_{2007}$. Câte cifre de 1 se folosesc la scrierea lui n în baza 10?

13. Considerăm numerele $a = 2^{2005}$, $b = 2^{2006}$, $c = 2^{2007}$. Care este ultima cifră a numărului $N = 2a + 3b + 4c$?

14. Ştiind că numerele naturale a şi b dau la împărţirea prin 2001 resturile 1001 şi respectiv 1999, determinaţi restul împărţirii la 667 a numărului $2a+3b$.

15. Se dă şirul de numere naturale $1,\ 2\cdot 3,\ 4\cdot 5\cdot 6,\ 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10, \ldots$. Care este al 50-lea termen al şirului?

Clasa a VI-a

1. Numărul x pentru care $x^2 + x - y - 4 = 0$, unde $x, y \in \mathbb{N}$ şi y număr prim, este ...

2. Raportul dintre un număr natural şi inversul său este 9; atunci suma dintre număr şi invers este ...

3. Dintre numerele 729^{100} şi 246^{150} mai mare este ...

4. Trei fraţi vor să-şi împartă între ei 240 de nuci. Ei hotărăsc să le împartă în părţi direct proporţionale cu numerele 2, 3 şi 5 şi apoi să dea câte 25 din nucile primite surorii mai mici, care astfel a primit ... nuci.

5. Numărul de trei cifre egal cu de 15 ori suma cifrelor sale este ...

6. Cel mai mic multiplu de 5 cu suma cifrelor 44 este ...

7. Un muncitor lucrează piese trei zile astfel încât 20% din producţia fiecărei zile este cât $\dfrac{1}{6}$ din producţia zilei următoare. Astfel, a treia zi a lucrat cu 55 piese mai mult ca în prima zi. A treia zi a lucrat ... piese.

8. Ştiind că raportul dintre suplementul sumei a două unghiuri adiacente şi suma suplementelor lor este $\dfrac{1}{3}$, măsura unghiului format de bisectoarele lor este ...

9. Cel mai mic număr de forma $\overline{xyz}$ $(x < y < z)$ divizibil cu 12 este ...

10. Cardinalul mulţimii $M = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{n+80}{n-10},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ este ...

11. Numărul natural care are exact trei divizori naturali, iar suma divizorilor este 183 este ...

12. Cel mai mic număr natural de trei cifre care împărţit pe rând la 2, 3, 4, 5, 6 dă resturi diferite nenule este ...

13. Un unghi XOY cu măsura de $179°$ este împărţit de 17 semidrepte în 18 unghiuri, cu măsurile exprimate prin numere naturale nenule, distincte. Cel mai mare unghi posibil dintre cele 18 este ...

14. Fie triunghiul ABC, $(AM$ bisectoarea unghiului BAC şi $AD \perp BC$, unde $D, M \in (BC)$. Dacă $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DAM})$ şi $m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{AMD}) = 180°$, atunci $\widehat{BAC}$ are măsura ...

15. Fie mulţimea $A = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 100\}$ şi B o submulţime a sa cu n elemente având proprietatea că, la orice alegere a celor n elemente din A, să existe cel puţin două cu suma 104. Valoarea minimă a lui n este ...

<u>Juniori</u> (Clasele VII-VIII)

1. *a*) Arătaţi că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, numărul $n^2+2n+2007$ nu este pătrat perfect.

b) Fie k un număr natural par, $k \geq 4$. Să se arate că există un număr natural n astfel încât numărul $n^2 + 2n + k$ să fie pătrat perfect.

2. Considerăm n drepte concurente în punctul P. Dreptele determină în jurul punctului $2n$ unghiuri cu interioare disjuncte, fiecare unghi având măsura de $7°$ sau de $17°$.

a) Să se afle n.

b) Să se arate că cel puţin două dintre cele n drepte sunt perpendiculare.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi fie M mijlocul laturii BC. Pe perpendiculara în A pe AM considerăm un punct D astfel încât segmentele DM şi AB să aibă un punct comun, notat P. Fie E proiecţia punctului D pe dreapta BC. Să se arate că $\widehat{BPM} = \widehat{EAC}$.

4. La un concurs de matematică participă n elevi, $n \geq 5$, iar proba conţine 5 probleme. Fiecare elev a rezolvat exact 3 probleme. Pentru orice grup de 5 elevi există o aceeaşi problemă rezolvată de fiecare elev din grup. Să se arate că există o aceeaşi problemă rezolvată de toţi concurenţii.

<u>Seniori</u> (Clasele IX-XII)

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x^3 - y^3 = 2xy + 7$.

2. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, unde $x_n = 1 + a+$ $+a^2 + \cdots + a^{2n}$. Demonstraţi că există o infinitate de numere prime care nu divid nici un termen al şirului.

3. Pentagonul convex $ABCDE$ are proprietăţile: $AB = BC$, $m(\widehat{ABE})+m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{DBE})$ si $m(\widehat{AEB}) + m(\widehat{BDC}) = 180°$. Demonstraţi că ortocentrul triunghiului BDE se află pe dreapta AC.

4. Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Demonstraţi că, oricum am colora cu două culori o mulţime de $\dfrac{n^3 + 5n}{6}$ numere întregi consecutive, există o submulţime monocoloră $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ astfel încât $1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \cdots \leq a_n - a_{n-1}$.

Concursul de matematică "Florica T. Câmpan"
Etapa judeţeană, 17-18 februarie 2007

Clasa a IV-a

1. Suma a patru numere este 282. Primul număr, pătrimea celui de-al doilea şi dublul celui de-al patrulea sunt cu 4 mai mari decât al treilea număr. Aflaţi numerele.

2. Găsiţi cel mai mic şi cel mai mare număr cu cifre distincte, ştiind că suma cifrelor fiecăruia este 17.

3. Koallo este un copil care locuişte în drăguţul orăşel Oloko din Nigeria. Cum el iubeşte matematica, recent a observat că dacă atribuie câte o altă cifră fiecăreia dintre literele K, O, A, L şi înmulţeşte numărul de 5 cifre corespunzător numelui orăşelului cu 11, obţine numărul corespunzător numelui său. Care sunt cifrele atribuite fiecărei litere?

Clasa a V-a

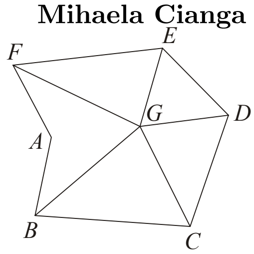
1. *a*) Fie numărul 1234567891011121314...200520062007. Să se suprime 100 de cifre astfel încât numărul rămas să fie cel mai mare posibil.

b) Să se determine cel mai mic număr natural de forma $\overline{a_1a_2...a_k}$, $k \geq 1$, care verifică relaţia $\overline{7a_1a_2...a_k} = 5 \cdot \overline{a_1a_2...a_k7}$.

2. Pentru rezolvarea temei de vacanţă, bunica îi dă Anei câte o surpriză Barbie imediat ce termină de rezolvat o nouă problemă. Ana constată de fiecare dată că, adunând cifrele numărului de surprize primite până atunci cu cifrele numărului de probleme care i-au rămas de rezolvat, obţine 11. Câte surprize Barbie va avea Ana la terminarea temei?

Mihaela Cianga

3. În figura alăturată avem un sistem de drumuri care leagă localităţile A, B, C, D, E, F, G. Fiecare drum existent între două localităţi vecine are lungimea un număr întreg de kilometri. O localitate se numeşte "nod impar" dacă suma lungimilor drumurilor care pleacă din ea este un număr impar de kilometri. Să se arate că localităţile nu pot fi toate "noduri impare".



Petru Asaftei