3. Pentagonul convex $ABCDE$ are proprietăţile: $AB = BC$, $m(\widehat{ABE})+m(\widehat{CBD}) = m(\widehat{DBE})$ si $m(\widehat{AEB}) + m(\widehat{BDC}) = 180°$. Demonstraţi că ortocentrul triunghiului BDE se află pe dreapta AC.

4. Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Demonstraţi că, oricum am colora cu două culori o mulţime de $\dfrac{n^3+5n}{6}$ numere întregi consecutive, există o submulţime monocoloră $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ astfel încât $1 \leq a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq \cdots \leq a_n - a_{n-1}$.

Concursul de matematică "Florica T. Câmpan"
Etapa judeţeană, 17-18 februarie 2007

Clasa a IV-a

1. Suma a patru numere este 282. Primul număr, pătrimea celui de-al doilea şi dublul celui de-al patrulea sunt cu 4 mai mari decât al treilea număr. Aflaţi numerele.

2. Găsiţi cel mai mic şi cel mai mare număr cu cifre distincte, ştiind că suma cifrelor fiecăruia este 17.

3. Koallo este un copil care locuişte în drăguţul orăşel Oloko din Nigeria. Cum el iubeşte matematica, recent a observat că dacă atribuie câte o altă cifră fiecăreia dintre literele K, O, A, L şi înmulţeşte numărul de 5 cifre corespunzător numelui orăşelului cu 11, obţine numărul corespunzător numelui său. Care sunt cifrele atribuite fiecărei litere?

Clasa a V-a

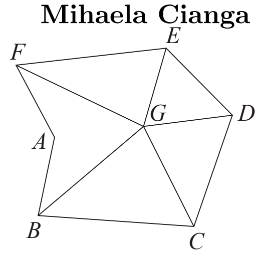
1. a) Fie numărul 12345678910111213141...200520062007. Să se suprime 100 de cifre astfel încât numărul rămas să fie cel mai mare posibil.

b) Să se determine cel mai mic număr natural de forma $\overline{a_1a_2...a_k}$, $k \geq 1$, care verifică relaţia $\overline{7a_1a_2...a_k} = 5 \cdot \overline{a_1a_2...a_k7}$.

2. Pentru rezolvarea temei de vacanţă, bunica îi dă Anei câte o surpriză Barbie imediat ce termină de rezolvat o nouă problemă. Ana constată de fiecare dată că, adunând cifrele numărului de surprize primite până atunci cu cifrele numărului de probleme care i-au rămas de rezolvat, obţine 11. Câte surprize Barbie va avea Ana la terminarea temei?

Mihaela Cianga

3. În figura alăturată avem un sistem de drumuri care leagă localităţile A, B, C, D, E, F, G. Fiecare drum existent între două localităţi vecine are lungimea un număr întreg de kilometri. O localitate se numeşte "nod impar" dacă suma lungimilor drumurilor care pleacă din ea este un număr impar de kilometri. Să se arate că localităţile nu pot fi toate "noduri impare".

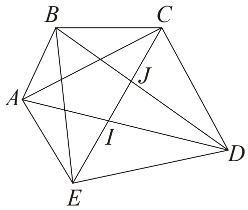


Petru Asaftei

Clasa a VI-a

1. O reprezentanţă a unui constructor de autoturisme a vândut în 2005 mai puţin de 200 de maşini. În 2006 vânzările au crescut cu 28%, iar în 2007 este preconizată o scădere cu 15% faţă de 2006. Câte autoturisme se prognozează a fi vândute în 2007?

Gabriel Popa



2. În figura alăturată este desenat un pentagon $ABCDE$ în care $\angle DAC \equiv \angle DBE$, $\angle ACE \equiv \angle BEC$ şi $[AC] \equiv [BE]$. Fie $\{I\} = AD \cap CE$ şi $\{J\} = BD \cap CE$.

a) Arătaţi că $\angle AIC \equiv \angle BJE$.

b) Demonstraţi că $[AD] \equiv [BD]$.

3. *a*) Câte numere naturale $\overline{a_1a_2...a_n}$ $(n \geq 2)$, formate din cifre nenule, au proprietatea că toate numerele $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, ..., \overline{a_{n-1}a_n}$ sunt pătrate perfecte?

Adrian Zanoschi

b) Alin aruncă două zaruri, iar Vlad aruncă trei zaruri. Fiecare vrea ca produsul numerelor obţinute de el să fie pătrat perfect. În care dintre cele două situaţii, probabilitatea atingerii obiectivului este mai mare?

Monica Nedelcu

Clasa a VII-a

1. *a*) Se dau două numere întregi x şi y. Cu ajutorul lor se formează un şir de numere în felul următor. Primul număr este egal cu x. Al doilea număr este egal cu $x + y$. Al treilea număr este egal cu diferenţa dintre al doilea şi primul număr. Al patrulea număr este egal cu diferenţa dintre al treilea şi al doilea număr. Al cincilea număr este egal cu diferenţa dintre al patrulea şi al treilea număr şi aşa mai departe. Să se afle primele 12 numere ale şirului şi al 2007-lea număr.

b) Alegeţi în faţa fiecăruia dintre numerele $1, 2, 3, ..., 2006$ unul dintre semnele "$+$" sau "$-$" astfel încât numărul $|\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm ... \pm 2006|$ să ia cea mai mică valoare. Determinaţi această valoare.

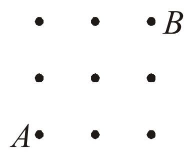
2. Un iaht trebuie să parcurgă un traseu sub formă de triunghi echilateral ABC, plecând din A. Pe iaht se află Sam, Bob şi John, care încearcă să înregistreze viteza vasului, dar având toţi trei rău de mare, nu reuşesc să reţină decât informaţii incomplete. Astfel, Sam a observat că iahtul a parcurs primele trei sferturi ale cursei în 3 ore şi jumătate, John şi-a notat doar că ultimele trei sferturi ale drumului au fost parcurse în 4 ore şi jumătate, iar Bob a observat că pentru a parcurge distanţa de la B la C au fost necesare cu 10 minute mai mult decât pentru distanţa de la A la B. Presupunând că, pe fiecare latură a triunghiului, iahtul a avut viteză constantă, să se determine durata parcurgerii întregului traseu.

3. Considerăm un pătrat $ABCD$ cu latura de 9 cm şi punctele $E \in AD$, $F \in BC$, astfel încât $A \in (ED)$, $C \in (BF)$, $AE = 9$ cm, $CF = 3$ cm. O furnică străbate cel mai scurt drum de la E la F care traversează pătratul după o paralelă la BC. Construiţi drumul pe care îl parcurge furnica şi aflaţi lungimea lui.

Clasa a VIII-a

1. Considerăm 9 puncte dispuse ca în figura alăturată:

O furnică pleacă din A şi ajunge în B trecând prin fiecare punct o singură dată, pe un drum fără autointersecţie şi mergând pe laturile sau diagonalele pătratelor mici care se pot forma cu punctele din reţea. Dacă lungimea laturii pătratului mic este 1, arătaţi că lungimea minimă a drumului străbătut de furnică este 8 şi cea maximă este $4+4\sqrt{2}$.



Gheorghe Iurea

2. Fie piramida triunghiulară $VABC$ astfel încât $AV \perp BV$, $BV \perp CV$, $CV \perp AV$ şi care are produsul oricăror două muchii opuse egal cu P. Asociem fiecărei muchii a piramidei cea mai mică dintre ariile triunghiurilor care au drept bază muchia respectivă şi vârful pe muchia opusă a piramidei.

a) Demonstraţi că V este egal depărtat de muchiile bazei ABC.

b) Dacă suma muchiilor piramidei este S şi distanţa de la V la una dintre muchiile bazei este d, calculaţi în funcţie de S şi d suma celor şase arii asociate muchiilor piramidei.

Julieta Grigoraş

3. Fie

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \mid a = a_1\sqrt{3} + a_2(\sqrt{3})^2 + \cdots + a_{2007}(\sqrt{3})^{2007}; a_i \in \{-1, 1\}, i = \overline{1, 2007} \right\}.$$

a) Determinaţi numărul de elemente raţionale din mulţimea A.

b) Determinaţi numărul elementelor mulţimii A.

Cristian Lazăr şi Claudiu-Ştefan Popa

Etapa interjudeţeană, 1-3 iunie 2007

Clasa a IV-a

1. Suma unor numere naturale consecutive este 90. Unul dintre numere este 10. Care sunt celelalte numere? Justificaţi răspunsul!

2. Se dă şirul de numere naturale 5, 10, 15, 20, 25, ... Care este primul număr din şir cu suma cifrelor 27?

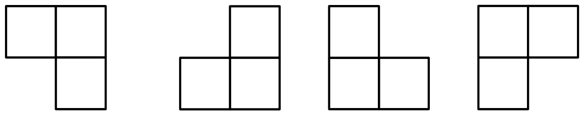
3. Lucian-Georges ia dintr-o cutie de fiecare dată mai multe bomboane decât luase data precedentă şi, în 5 dăţi, a luat în total 31 bomboane. Câte bomboane a luat a patra oară, dacă prima dată a luat de trei ori mai puţine bomboane decât a cincea oară?

Clasa a V-a

1. Un dreptunghi cu n linii şi m coloane este împărţit în pătrăţele 1×1. Pe prima linie colorăm primul pătrăţel, pe a doua linie colorăm primele două pătrăţele, pe a treia linie primele patru pătrăţele, pe a patra linie primele opt pătrăţele ş. a. m. d., până când pe a n-a linie se vor colora toate pătrăţelele. Ştiind că numărul total de pătrăţele colorate este 1023, aflaţi câte linii şi câte coloane are dreptunghiul.

Mihaela Bucătaru

2. Pe o tablă de şah se găsesc 31 de pioni. Arătaţi că pe tablă există o porţiune având una dintre formele din figura de mai jos, pe care nu se află niciun pion.



Tamara Culac

3. Un tâlhar împarte prada cu tovarăşul său de răutăţi. Dintr-un săculeţ plin cu monede de 10 bani, el scoate pe rând câte o monedă, numărând: "Una la tine, una la mine; a doua la tine, una, două la mine; a treia la tine, una, două, trei la mine; ... " şi la fiecare număr rostit, aşează câte o monedă în faţa sa sau a tovarăşului său. Dacă în săculeţ sunt 6000 de monede, aflaţi ce sumă (în lei) revine fiecărui tâlhar.

Gabriel Popa

Clasa a VI-a

1. Două coli de hârtie care au aceleaşi dimensiuni, $L = 9$ dm şi $l = 5$ dm, se taie în dreptunghiuri, prima prin drepte paralele cu lungimea, iar a doua prin drepte paralele cu lăţimea, numărul şi dimensiunile acestor dreptunghiuri fiind arbitrare. Să se arate că există cel puţin o situaţie în care suma perimetrelor tuturor dreptunghiurilor obţinute prin tăiere din prima coală este egală cu suma perimetrelor tuturor dreptunghiurilor obţinute din a doua coală.

Petru Asaftei

2. *a*) Fie mulţimea $A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \dfrac{2n+7}{3n+1} \text{ fracţie reductibilă} \right\}$. Să se găsească trei elemente din mulţimea A.

Enache Pătraşcu

b) Cum plantează un pomicultor 10 copaci pe 5 rânduri, astfel încât să fie 4 copaci pe fiecare rând?

3. Un evantai are 37 de spiţe, astfel încât unghiul dintre oricare două spiţe alăturate are măsura de 5°. Să se arate că, dacă se aleg oricare 12 spiţe, exceptând-o pe prima, se formează cel puţin trei unghiuri de măsuri egale.

Doru Buzac

Clasa a VII-a

1. Dan are trei jetoane pe care sunt scrise trei numere reale pozitive, iar Ana are alte trei pe care sunt scrise inversele lor. Dan îi dă Anei un jeton pe care aceasta îl asociază cu un altul decât inversul său. Apoi, Ana îi dă lui Dan un jeton pe care acesta îl asociază cu un altul decât inversul său. Ştefan primeşte de la cei doi copii jetoanele rămase şi constată că nici numerele sale nu sunt inverse unul celuilalt. Fiecare anunţă suma numerelor pe care le are pe cele două jetoane, respectiv 4, 1 şi $\dfrac{7}{3}$. Arătaţi că produsul numerelor scrise pe cele trei jetoane deţinute iniţial de Dan este 1.

Mihaela Cianga

2. Fie I punctul de intersecţie al diagonalelor trapezului $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB = a$ cm, $CD = b$ cm, $a > b$. Paralela prin I la AB intersectează pe AD şi BC în punctele P, respectiv Q. Trei mobile M_1, M_2 şi M_3 pleacă simultan, pe drumul cel mai scurt, din punctele B, Q, C spre punctele A, P respectiv D, astfel: M_1 cu viteza constantă b cm/s, M_2 cu viteza constantă a cm/s până în I şi apoi, fără oprire, cu viteza constantă b cm/s de la I la P, iar M_3 cu viteza constantă a cm/s. Aflaţi ordinea în care ajung cele trei mobile în punctele A, P, respectiv D.

Claudiu Ştefan Popa

3. Se consideră în plan nouă puncte, astfel încât din oricare trei se pot alege cel puţin două cu distanţa dintre ele mai mică sau egală cu 1. Arătaţi că există un disc de rază 1 care conţine cel puţin 5 puncte din cele considerate.

Gheorghe Blendea

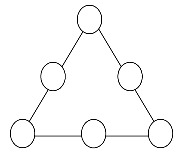
Clasa a VIII-a

1. Pe tablă sunt scrise numerele $\sqrt{3}-1$, $\sqrt{3}+1$, 2. Se şterg cele trei numere şi se scriu în locul lor cele trei medii geometrice a câte două dintre numere. Se repetă procedeul cu noile numere. Este posibil ca după mai mulţi paşi pe tablă să fie scrise numerele:

a) $\sqrt{2\sqrt{3}-2}$, 2, $\sqrt{2\sqrt{3}+2}$; *b*) $2-\sqrt{3}$, $2+\sqrt{3}$, 4?

Monica Nedelcu

2. Triunghiul alăturat este considerat fix. În câte moduri putem aşeza numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 în cerculeţe, astfel încât suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului să fie aceeaşi?



Petru Asaftei

3. Există o ţară K a cubarzilor. Un cubard are corpul de forma unui cub, o antenă ce porneşte dintr-un vârf al cubului, o coadă ce este diagonală a unei feţe a cubului şi o gură care este exact la mijlocul unei muchii a cubului. Un cubard se poate rostogoli după voie, se poate umfla sau strânge dupa plac, îşi poate roti antena cum vrea. Nu există doi cubarzi pe care i-am putea suprapune încât sa le coincidă cozile, gurile şi antenele. Care este numărul maxim al cubarzilor?

Dan Brânzei

Olimpiada Balcanică de Matematică – Juniori (JMBO)

Ediţia a XI-a, Şumen (Bulgaria), 23-30 iunie 2007

La această ediţie a concursului au participat 11 ţări: *Albania*, *Bosnia & Herţegovina*, *Cipru*, *Macedonia*, *Grecia*, *Moldova*, *Muntenegru*, *România*, *Serbia*, *Turcia*, *Bulgaria 1* şi trei echipe în afara concursului: *Bulgaria 2*, *Kazahstan* şi *Şumen & Varna*.

Delegaţia României a fost condusă de prof. *Dinu Şerbănescu* şi prof. *Mircea Fianu*. Echipa ţării noastre a fost compusă din următorii elevi: **Chindea Filip** şi **Bumbacea Radu** (din Bucureşti) – medaliaţi cu aur (ambii au acumulat maximum de puncte), **Tiba Marius** (Iaşi), **Ciolan Emil Alexandru** (Slatina), **Muntean Alexandru** (Bucureşti) şi **Filip Laurian** (Arad) – medaliaţi cu argint.