Concursul de Matematică "Al. Myller"
Ediţia a IV-a, Iaşi

Clasele IV-VI, aprilie 2006

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 90 min. Se acordă din oficiu 30 de puncte, câte 6 puncte pentru problemele 1-5, câte 8 puncte pentru problemele 6-10 şi câte 10 puncte pentru problemele 11-15.

Clasa a IV-a

1. Ce număr trebuie scăzut din 9 pentru ca diferenţa obţinută înmulţită cu 8 să devină 40?

2. Într-o clasă sunt băieţi şi fete. Numărul băieţilor este cu 3 mai mare decât numărul fetelor. Dacă în clasă ar veni 4 băieţi şi ar pleca 4 fete, atunci numărul băieţilor ar fi de 2 ori mai mare decât numărul fetelor. Câţi elevi sunt în clasă?

3. Se dau numerele: $a = 1 + 2 + 3 + \cdots + 9$; $b = 11 + 22 + 33 + \cdots + 99$; $c = 111 + 222 + 333 + \cdots + 999$. Să se calculeze câtul împărţirii lui $a + b + c$ la 123.

4. Suma dintre un număr şi succesorul său este cu 2006 mai mare decât predecesorul său. Care este numărul?

5. Fie pătratul magic (sumele elementelor de pe linii, coloane şi diagonale sunt egale). Aflaţi ce număr trebuie înscris în căsuţa marcată cu X?

X		
	10	12
9		7

6. Împărţind numărul natural a la numărul natural b, obţinem câtul 6 şi restul 31. Să se afle a ştiind că $a - b < 196$.

7. Într-un coş sunt 28 fructe: mere, pere şi caise. Câte fructe sunt de fiecare fel, dacă mere sunt de 6 ori mai multe decât pere, iar în coş se află cel puţin un fruct de fiecare fel?

8. Câte numere de 3 cifre se împart exact la 21?

9. Aflaţi cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 56.

10. Să se afle 3 numere naturale ştiind că: produsul primelor două este 84, produsul ultimelor două este 192, iar suma dintre primul şi ultimul este 46.

11. Un tată, dorind să-şi încurajeze fiul să rezolve probleme, îi promite că îi va da 8 monede pentru fiecare problemă bine rezolvată, dar pentru problema pe care nu a rezolvat-o sau a rezolvat-o greşit, fiul va trebui să-i plătească 5 monede. După 26 de probleme, fiul nu trebuie să plătească nimic, dar nici să primească ceva. Câte probleme a rezolvat corect?

12. Ioana culege o lădiţă de căpşuni în 40 minute, iar Luiza culege o lădiţă în 2 ore. În cât timp vor culege împreună 3 lădiţe de căpşuni?

13. Mama are cu 14 lei mai mult decât Paul şi cu 10 lei mai mult decât Tudor. Câţi lei va da fiecăruia din băieţi pentru a avea toţi 3 aceeaşi sumă?

14. M-am născut în secolul XX. Dacă în 1999 am avut o vârstă egală cu suma cifrelor anului meu de naştere, ce vârstă am acum?

15. Sony cară în fiecare zi câte o piatră din vârful muntelui. În prima zi a petrecut 7 ore urcând şi coborând, a doua zi a petrecut 8 ore urcând şi coborând. În fiecare zi urcă de două ori mai încet decât în ziua precedentă, dar coboară de 2 ore mai repede. Cât timp va munci în cea de-a treia zi?

Clasa a V-a

1. Care este cel mai mare număr natural impar de 4 cifre distincte?

2. Determinaţi $x \in \mathbb{N}$ pentru care $5 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x = 81$.

3. Câţi termeni are suma $26 + 32 + 38 + \cdots + 2006$?

4. Câte pătrate perfecte conţine mulţimea $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1000\}$?

5. Câte mulţimi X verifică $\{1, 2\} \cup X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$?

6. Câte numere $\overline{xy}$ scrise în baza 10 verifică relaţia $x + \overline{xy} = y + \overline{yx} + 50$?

7. Dacă $a \cdot b + a \cdot c = b \cdot c + c^2$, $b + c = 1003$, calculaţi $a + 2b + c$.

8. Să se determine un număr de 4 cifre al cărui produs cu 9 se termină cu 3755.

9. Dacă restul împărţirii lui $2a + 3b + 5c$ la 13 este 7, aflaţi restul împărţirii lui $34a + 51b + 85c$ la 13.

10. Câte numere care se scriu cu 4 cifre în baza 10 au suma cifrelor 3?

11. Se consideră 5 numere naturale distincte având suma 60. Găsiţi numerele dacă suma diferenţelor dintre cel mai mare şi fiecare dintre celelalte 4 numere este 10.

12. Care sunt ultimele două cifre ale lui $5^{2006} + 7^{2006}$?

13. Fie $M = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}^*, a + b = 2006 \right\}$. Care este produsul elementelor lui M?

14. Suma a două numere naturale este $3n + 5$, $n \in \mathbb{N}^*$. Împărţind un număr la dublul celuilalt obţinem câtul n şi restul 0. Care sunt numerele?

15. Se scriu în ordine crescătoare toate numerele nenule din baza 10 în a căror scriere nu apar alte cifre afară de 0, 1, 2 şi 3. Care este cel de-al 2006-lea număr?

Clasa a VI-a

1. Care este cel mai mic număr natural de nouă cifre divizibil cu trei?

2. Fie a, b, c, d măsurile a 4 unghiuri formate în jurul unui punct. Să se afle aceste măsuri dacă $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4}$.

3. Preţul unui obiect se micşorează cu 20%. Cu cât la sută trebuie să se mărească noul preţ pentru a se ajunge la preţul iniţial?

4. Calculaţi măsura unui unghi ştiind că triplul complementului său este cu $42^\circ\ 30'$ mai mare decât jumătatea suplementului său.

5. Care este cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul $n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_9 - a_{10}$, unde $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ sunt numere naturale distincte din mulţimea $\{1, 2, 3, \ldots 10\}$?

6. Fie A, B, C, D puncte pe o dreaptă, în această ordine, astfel încât $\dfrac{AC}{BD} = 1$, $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{7}{5}$. Calculaţi $\dfrac{BC}{AD}$.

7. Se dau două vase cu apă astfel încât dacă turnăm jumătate din primul în al doilea şi jumătate din cantitatea de apă ce se află acum în al doilea o turnăm în primul şi luând apoi jumătate din cantitatea aflată în primul şi o turnăm în al doilea obţinem (în al doilea vas) 10 litri apă. Aflaţi câţi litri de apă se află în fiecare vas, ştiind că ambele cantităţi sunt numere întregi.

8. Arătaţi că numărul $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{4n}$ se divide cu 120, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

9. Să se calculeze a 2007-ea zecimală a numărului $n = 0,00\,(300) + 0,00\,(3000) + 1$.

10. Să se afle x, ştiind că

$$\frac{1}{2}\%\text{din}\left(\frac{2}{3}\%\text{din}\left(\frac{3}{4}\%\text{din}\left(\ldots\left(\frac{n}{n+1}\%\text{din } x\right)\ldots\right)\right)\right) = \frac{1}{100^n\,(n+1)}.$$

11. Fie n un număr natural, $n > 2$. Numărătorii şi numitorii fracţiilor $\dfrac{222\ldots23}{333\ldots34}$ şi $\dfrac{555\ldots56}{666\ldots67}$ au câte n cifre. Care este fracţia mai mare?

12. Câte unghiuri cu măsurile numere naturale consecutive se pot forma în jurul unui punct?

13. Măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporţionale cu trei numere invers proporţionale cu trei numere direct proporţionale cu trei numere puteri consecutive ale lui 3. Găsiţi măsurile unghiurilor.

14. Fie $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 10^{2006}$. La ce putere apare 2 în descompunerea în factori primi a lui S?

15. Să se afle cardinalul mulţimii $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \dfrac{2006!}{7^x \cdot 11^y} \in \mathbb{N}\right\}$, unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \;\cdots\; \cdot n$.

Clasele VII-XII, 19 aprilie 2006

Juniori

1. Să se arate că ecuaţia $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{c}$ are o infinitate de soluţii în $(\mathbb{N}^*)^3$.

2. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în C şi $D \in (BC)$, $E \in (CA)$ astfel încât $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{AE}{CD} = k$. Dreptele BE şi AD se intersectează în O. Să se arate că $m(\widehat{BOD}) = 60^\circ$ dacă şi numai dacă $k = \sqrt{3}$.

3. Se dau în plan 5 puncte cu proprietatea că oricare dintre cele 10 triunghiuri cu vârfurile în aceste puncte are aria cel mult egală cu 1. Să se arate că există un trapez de arie cel mult 3 ce conţine în interior sau pe laturi cele 5 puncte.

Seniori

1. Fie $p \geq 3$ număr prim. Demonstraţi că $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{k^p - k}{p} \equiv \frac{p+1}{2} \pmod p$.

2. Fie $p \geq 5$ număr prim. Determinaţi numărul polinoamelor de forma $X^p + pX^k + pX^l + 1$, $k > l$, $k, l \in \{1, 2, \ldots p-1\}$ care sunt ireductibile în $\mathbb{Z}[X]$.

3. Mediana AM a triunghiului ABC taie cercul înscris în K şi L. Dreptele duse prin K şi L paralele la BC taie a doua oară cercul înscris în X şi Y. Fie P, Q intersecţiile dreptelor AX şi AY cu BC. Arătaţi că $BP = CQ$.

Recreaţii ... matematice

ARITMOGRIF

?

	8	11																	7	12	
	3	6	1															21	6	1	
	9	2	6	12		14									9		4	15	9	2	
	10	5	3	2	9	12	8	7	18			19	8	12	4	6	1	2	13	19	
A	1	2	3	1	2	4	5	6	6	*	7	4	5	2	7	4	5	6	3	2	B
			6	1	8	12	13	1	15			10	10	6	2	3	6	17			
				13	8	12	15	13	2			8	1	19	15	13	17				
					2		16	17	8			8	7	15		20					

Înlocuind numerele cu litere veţi obţine numele a 18 matematicieni.
Pe orizontală A-B: numele unei reviste de matematică pentru elevi şi profesori.

Prof. Valeriu Braşoveanu
C. N. "Gh. Roşca Codreanu", Bârlad

(Rezolvarea aritmogrifului se găseşte la pag. 162)

Vizitaţi pe Internet revista "Recreaţii Matematice" la adresa
http://www.recreatiimatematice.uv.ro