Olimpiada Balcanică de Matematică
Ediţia a XXII-a, 4 - 10 mai 2005, Iaşi

Afirmăm că Balcaniada a binemeritat un oraş istoric, cultural, pitoresc şi ospitalier ca Iaşul. Mai afirmăm că frumosul oraş Iaşi a binemeritat găzduirea Balcaniadei şi pentru eficientul suflu provenit de la profesorii matematicieni, certificat de rezultatele unor elevi excepţionali şi respectat de semenii lor.

Fapt este că în ultimii ani, între cele circa 40 de concursuri internaţionale de matematică ce se desfăşoară anual pe glob, balcaniadele se plasează pe un loc de frunte. Buna sa reputaţie este convingător dovedită de dorinţa unor ţări ca Anglia, Kazahstan, Ungaria şi Yakuţia de a participa la acest concurs. Acceptând invitarea acestor ţări în concurs, România a participat şi cu o a doua echipă în competiţie; această echipă a probat tuturor că beneficiem de un set de elevi matematicieni valoros. Consemnăm astfel că actuala balcaniadă a atins un record de participare: 14 echipe.

Nu Balcanii au devenit mai înalţi spre a putea fi observaţi din Anglia, Kazahstan, Ungaria şi Yakuţia, ci matematicienii balcanici (cercetători, profesori, elevi) s-au învrednicit de bună recunoaştere mondială. Cum matematica este o cale minunată de a sesiza esenţe adânci, se dovedeşte a fi un excelent liant pentru dragoste, prietenie, colaborare şi înţelegere reciprocă.[2]

*

* *

Timpul de lucru acordat elevilor participanţi a fost de $4\frac{1}{2}$ ore. Fiecare problemă a fost punctată cu 10 puncte. Echipa fiecărei ţări are în componenţă 6 elevi. Punctajul maxim ce putea fi realizat de un elev este de 40 puncte, iar de o echipă este de 240 puncte.

Tradiţia Balcaniadelor nu prevede alcătuirea de clasamente după vreun criteriu prestabilit. Dacă am face, neoficial, un astfel de lucru, am putea, funcţie de criteriul ales, spune:

– *în ordinea punctajului total al echipelor:* **România** (191 p), **Bulgaria** (146 p), **R. Moldova** (139 p), **Kazahstan** (134 p) etc.

– *în ordinea medaliilor:* **România** (3 aur + 2 argint + 1 bronz), **R. Moldova** (2+1+2), **Kazahstan** (1+2+3), **Ungaria** (1+1+3) etc.

– *în ordinea punctajului total al elevilor:* **Adrian Zahariuc** (40 p), **Dragoş Michnea** (39 p), **Andrei Ştefănescu** (38 p), **Marios Papamichalis** (33 p) etc.

Mai spunem că România, ca ţară gazdă, a participat la această ediţie a OBM şi cu echipă secundă, care a avut o comportare bună.

*

* *

Prezentăm în continuare enunţurile problemelor ce s-au dat la această Balcaniadă şi soluţiile acestora în redactarea oferită de elevul **Andrei Zahariuc** (cl. a X-a, Col. Naţ. "Ferdinand I", Bacău), care a realizat punctajul maxim la toate cele patru probleme.

---

[2] Cuvinte de introducere datorate prof. dr. **Dan Brânzei**.

1. *Cercul înscris în triunghiul ascuţitunghic ABC este tangent laturilor AB şi AC în D şi respectiv E. Bisectoarele unghiurilor $\angle ACB$ şi $\angle ABC$ intersectează dreapta DE în X, respectiv Y. Fie Z mijlocul laturii BC. Demonstraţi că triunghiul XYZ este echilateral dacă şi numai dacă măsura unghiului $\angle BAC$ este de $60°$.*

2. *Găsiţi toate numerele prime p pentru care $p^2 - p + 1$ este cub perfect.*

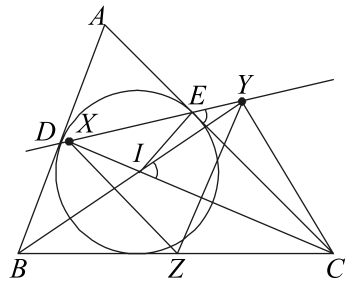
3. *Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Demonstraţi inegalitatea*

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c + \frac{4\,(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Precizaţi când are loc egalitatea.

4. *Fie $n \geq 2$ un număr întreg. Fie S o submulţime în $\{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât S să nu conţină două elemente dintre care unul îl divide pe celălalt şi nici două elemente prime între ele. Care este numărul maxim de elementele ale unei astfel de mulţimi S?*

Soluţii



1. Vom nota cu $\angle A$, $\angle B$ respectiv $\angle C$, măsurile unghiurilor triunghiului ABC. Observaţia cheie este că unghiurile $\angle BXC$ şi $\angle BYC$ sunt drepte, fapt dovedit mai jos.

Să luăm cazul când $E \in (DY)$, cazul $Y \in (DE)$ tratându-se în mod asemănător. Avem $\angle YEC = \angle AED = 90° - \angle A/2$ şi $\angle YIC = 180° - \angle BIC = 90 - \angle A/2$, deci $\angle YEC = \angle YIC$. Rezultă că patrulaterul $YEIC$ este inscriptibil, deci $\angle IYC = \angle IEC = 90°$, adică $\angle BYC = 90°$. Analog, $\angle BXC = 90°$.

Vom vedea că triunghiul XYZ este un triunghi isoscel cu unghiul din vârf egal cu $\angle A$, de unde concluzia urmează în mod evident. În triunghiurile dreptunghice BXC şi BYC avem $XZ = BC/2$ şi $YZ = BC/2$, deci $XZ = YZ$. Apoi, $\angle XZY = 180° - \angle XZB - \angle YZC = 180° - 2\angle BCX - 2\angle CBY = 180° - \angle B - \angle C = \angle A$, ceea ce completează demonstraţia.

2. *Soluţia I.* Singura soluţie este $p = 19$. Evident, aceasta este o soluţie deoarece $19^2 - 19 + 1 = 343 = 7^3$. Să demonstrăm că aceasta este, într-adevăr, singura. Fie $p^2 - p + 1 = a^3$. Atunci, ecuaţia se scrie

$$p(p-1) = (a-1)\left(a^2 + a + 1\right). \tag{1}$$

Rezultă că $p | a - 1$ sau $p | a^2 + a + 1$. Dacă $p | a - 1$, atunci $p < a$, deci $p^2 - p + 1 > p^3$, imposibil. Aşadar, $p | a^2 + a + 1$, adică $a^2 + a + 1 = kp$. Din (1), avem $p - 1 = k(a-1)$, deci $p \equiv 1 (\operatorname{mod} a - 1)$. Deducem că avem

$$k \equiv kp = a^2 + a + 1 \equiv 3 (\operatorname{mod} a - 1). \tag{2}$$

Dacă $k \geq a + 2$, urmează că $p - 1 = k(a-1) \geq (a-1)(a+2)$, de unde $p \geq a^2 + a - 1$. Atunci,

$$a^2 + a + 1 = pk \geq k(a^2 + a - 1) \geq 2(a^2 + a - 1) \Rightarrow a \leq 1,$$

caz în care nu avem soluţii. Aşadar, $k \leq a+1$ sau $k-3 \leq a-2$ şi, din (2), rezultă $k=3$. Ca urmare $p=3a-2$ şi $a^2+a+1=3(3a-2)$, de unde $a^2-8a+7=0$, deci $a \in \{1,7\}$. Pentru $a=1$ nu avem soluţii, deci $a=7$ şi $p=19$ este unica soluţie.

Soluţia II. Ca şi mai sus, $a^2+a+1=kp$ şi $p-1=k(a-1)$. Înlocuind p în prima relaţie, obţinem

$$a^2+a+1=k(ka-k+1) \Leftrightarrow a^2+(1-k^2)a+\left(k^2-k+1\right)=0.$$

Această ecuaţie de gradul 2 în a trebuie să aibă discriminantul $\Delta=\left(k^2-1\right)^2-4\left(k^2-k+1\right)$ pătrat perfect. Pentru $k \leq 1$ nu avem soluţii, deci $k \geq 2$. Cum $\Delta<\left(k^2-1\right)^2$ şi $\Delta \equiv \left(k^2-1\right)^2 \pmod 2$, rezultă că

$$\Delta \leq \left(k^2-3\right)^2 \Leftrightarrow \left(k^2-1\right)^2-\left(k^2-3\right)^2 \leq 4\left(k^2-k+1\right) \Leftrightarrow$$
$$4\left(k^2-2\right) \leq 4\left(k^2-k+1\right) \Leftrightarrow k \leq 3$$

Analizând cazurile $k=2$ şi $k=3$ obţinem că singura soluţie este dată de $k=3$, $a=7$, $p=19$.

3. *Soluţia I.* Vom folosi sumarea ciclică. Inegalitatea se scrie succesiv astfel:

$$\sum \frac{a^2}{b} \geq \sum a+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \Leftrightarrow \sum\left(\frac{a^2}{b}-2a+b\right) \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \Leftrightarrow$$
$$\sum \frac{(a-b)^2}{b} \geq \frac{4(a-b)^2}{a+b+c}. \qquad (*)$$

Conform inegalităţii Cauchy-Schwarz avem

$$(b+c+a)\left(\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(c-b)^2}{c}+\frac{(a-c)^2}{a}\right) \geq (a-b+c-b+a-c)^2=4(a-b)^2$$

şi inegalitatea este demonstrată. Să vedem acum când avem egalitate. În inegalitatea de mai sus are loc semnul egal când

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-b}{c}=\frac{a-c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}-1=1-\frac{b}{c}=1-\frac{c}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{c}=\frac{c}{a}=2-\frac{a}{b}=x$$

Deoarece $b/c=c/a=x$, avem $a/b=1/x^2$. Deoarece $x>0$ urmează că

$$2-\frac{1}{x^2}=x \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-1=x^3 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x^2-x-1)=0,$$

deci $x \in \{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$. Pentru $x=1$ rezultă că $a=b=c$, iar pentru $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ rezultă că a, c, b formează o progresie geometrică de raţie $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $c=a\varphi,\ b=a\varphi^2$. În ambele cazuri obţinem egalitate.

Soluţia II. O altă modalitate de a prelucra inegalitatea este de a folosi *identitatea lui Lagrange.* Avem

$$\sum \frac{a^2}{b} \geq \sum a+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c} \Leftrightarrow \left(\sum b\right)\left(\sum \frac{a^2}{b}\right)-\left(\sum a\right)^2 \geq 4(a-b)^2.$$

Acum, folosind identitatea lui Lagrange, obţinem că

$$\left(\sum b\right)\left(\sum \frac{a^2}{b}\right)-\left(\sum a\right)^2=\left(\sum \sqrt{b}^2\right)\left(\sum \sqrt{\frac{a^2}{b}}^2\right)-\left(\sum \sqrt{b}\sqrt{\frac{a^2}{b}}\right)^2=$$

$$= \sum \left(\sqrt{b}\sqrt{\frac{b^2}{c}} - \sqrt{c}\sqrt{\frac{a^2}{b}} \right)^2 = \sum \frac{\left(b^2 - ac\right)^2}{bc}.$$

Aşadar, rămâne de arătat că

$$\sum \frac{\left(b^2 - ac\right)^2}{bc} \geq 4(a-b)^2 \Leftarrow \frac{\left(b^2 - ac\right)^2}{bc} + \frac{\left(a^2 - bc\right)^2}{ab} \geq 4(a-b)^2.$$

Din Cauchy-Schwarz rezultă că

$$\frac{\left(-b^2 + ac\right)^2}{bc} + \frac{\left(a^2 - bc\right)^2}{ab} \geq \frac{\left(a^2 - b^2 - bc + ac\right)^2}{ab + bc} = \frac{(a-b)^2 (a+b+c)^2}{b(a+c)} \geq$$

$$\geq \frac{(a-b)^2 4b(a+c)}{b(a+c)} = 4(a-b)^2,$$

deci inegalitatea este demonstrată. Pentru a obţine cazul de egalitate procedăm ca şi în prima soluţie.

4. Răspunsul este $[(n+2)/4]$. Acest număr se poate atinge pentru $S = \{k$ par; $k > n/2\}$. Se verifică imediat că $|S| = [(n+2)/4]$ şi că mulţimea S are proprietatea dorită. Acum, să demonstrăm că orice mulţime $S \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ cu proprietatea că $(x, y) \neq 1$, x şi y, pentru orice $x, y \in S$ cu $x \neq y$, are cel mult $[(n+2)/4]$ elemente.

Pentru orice $m \in \{1, 2, ..., n\}$, există un unic $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n/2 < 2^k m \leq n$. Să considerăm atunci aplicaţia $f : S \to \{[(n+1)/2], ..., n\}$ care atribuie fiecărui $s \in S$ numărul $2^k s \in \{[(n+1)/2], ..., n\}$. Funcţia f este injectivă deoarece $f(a) = f(b)$ implică $a|b$ sau $b|a$, ceea ce este imposibil. Aşadar, $|S| = |f(S)|$. În plus, $(a, b) \neq 1 \Rightarrow (f(a), f(b)) \neq 1$ şi, în particular, în imaginea $f(S)$ a funcţiei f nu pot exista două numere consecutive. Din această observaţie, pentru n de forma $4k$, $4k+2$ sau $4k+3$ rezultă direct că $|f(S)| \leq [(n+2)/4]$. În cazul $n = 4k+1$, rămâne situaţia limită $f(S) = \{2k+1, 2k+3, ..., 4k+1\}$, care nu convine deoarece $(2k+1, 2k+3) = 1$. Aşadar, $|S| = |f(S)| \leq [(n+2)/4]$ pentru orice n şi orice mulţime S cu proprietatea din enunţ.
