CONCURSURI ŞI EXAMENE

Concursul de matematică "Al. Myller"

Ediţia a III-a, Iaşi

Clasele IV-VI, 19 martie 2005

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 90 min. Se acordă din oficiu 30 de puncte, câte 6 puncte pentru problemele 1-5, câte 8 puncte pentru problemele 6-10 şi câte 10 puncte pentru problemele 11-15.

Clasa a IV-a

1. Calculaţi a din egalitatea $8 \cdot \{212 - 5 \cdot [a + 3 \cdot (5 \cdot 6 - 17)]\} = 96$.

2. Câte numere naturale n verifică relaţia $(n + 7)(n + 8) < 100$?

3. Calculaţi $3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 2005 - 2 - 4 - 6 - 8 - \cdots - 2004$.

4. Câte numere cuprinse între 100 şi 901 se împart exact la 9?

5. Ionel are de rezolvat 2 fişe cu câte 20 de probleme fiecare. De pe prima fişă a rezolvat un număr de probleme, iar de pe a doua atâtea probleme câte i-au rămas de pe prima fişă. Câte probleme mai are de rezolvat Ionel?

6. Să se calculeze suma numerelor de forma $\overline{ab}$, $a < b$, ştiind că $\overline{ab} + \overline{ba} = 143$.

7. Sunt 36 de fete într-o clasă, 19 brunete şi 22 cu ochi albaştri. Câte dintre ele sunt şi brunete şi cu ochi albaştri?

8. Nişte copii au 2 acadele şi 4 mere fiecare, iar alţii au 5 acadele şi 3 mere fiecare. În total au 9 acadele. Câte mere au?

9. Dacă 2 stilouri costă cât 3 caiete sau cât 5 pixuri, iar 6 stilouri şi 5 caiete costă 210 000 lei, aflaţi cât costă fiecare obiect.

10. La o librărie vânzându-se zilnic acelaşi număr de caiete, după 5 zile au mai rămas 200 bucăţi. Să se afle câte bucăţi au fost iniţial, ştiind că dacă se vindeau zilnic cu 200 bucăţi mai mult, în 2 zile s-ar fi vândut jumătate din întreaga cantitate.

11. Care este restul împărţirii numărului $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2004 + 2006$ la numărul 2005?

12. Florin a completat şirul de numere 1, 2, 4, 3, 5, 6, 8, 7, 9, 10, 12, 11, ... cu încă 4 numere după o anumită regulă, dar Maria le-a şters din greşeală pe ultimele 4. Care sunt aceste numere?

13. Maria a început să citească o carte pe 1 iulie. În fiecare zi ea citeşte acelaşi număr de pagini şi a terminat cartea pe 31 iulie. Dacă în prima zi ea ar fi citit de 4 ori mai puţine pagini şi în fiecare zi următoare câte o pagină mai mult decât în ziua precedentă, ea ar fi terminat cartea tot la 31 iulie. Câte pagini are cartea?

14. La întâlnirea intergalactică de pe planeta Sync au sosit 14 adulţi şi 25 copii. S-au format 3 grupe: grupa 1 în care fiecare adult este însoţit de un copil, grupa 2 în care fiecare adult este însoţit de 2 copii şi grupa 3 în care fiecare adult este însoţit de 3 copii. Se ştie că numărul adulţilor însoţiţi de un singur copil din grupa 1 este mai mare decât 6, iar numărul total al copiilor din grupele 2 şi 3 este mai mare ca 17. Să se afle câţi adulţi şi câţi copii sunt în fiecare grupă.

15. Dimineaţa o cioară zboară pe prima creangă şi croncăne o dată, apoi zboară pe a doua creangă şi croncăne de două ori, apoi zboară pe a treia creangă şi croncăne de trei ori şi aşa mai departe. Pe a câta creangă va sta cioara când va croncăni a 40-a oară?

Clasa a V-a

1. Aflaţi $\overline{ab}$ dacă $\overline{ab5} = 5^{a+b}$.

2. Suma cifrelor unui număr natural de zece cifre este 9. Care este produsul cifrelor acestui număr?

3. Într-o livadă sunt mai mult de 90 pomi dar mai puţin de 100 pomi. O treime sunt meri, un sfert sunt pruni, iar restul cireşi. Câţi pomi sunt în livadă?

4. Aflaţi numărul natural x pentru care $x^2 + 10^{2004} = 10^{2005}$.

5. Calculaţi suma elementelor mulţimii $\left\{\overline{ab} \mid \overline{ab} + \overline{ba} = 110\right\}$.

6. Aflaţi două numere naturale cu proprietatea că cel mai mare divizor comun al lor este 7, iar suma pătratelor celor două numere este 637.

7. Dodo a uitat ultimele trei cifre ale codului de la seif care avea forma $\overline{20042005abc}$. Ştiind că numărul este multiplu de 25, câte combinaţii trebuie să încerce pentru a deschide seiful dacă nu are deloc noroc?

8. Fie $a = 2^3 \cdot 2^6 \cdot \ldots \cdot 2^{300}$ şi $b = (27^3)^{1010}$. Care număr este mai mic?

9. Suma a 13 numere naturale nenule distincte este 92. Care este cel mai mare termen al sumei?

10. Dintr-un număr de patru cifre ştergem ulima cifră, iar numărul obţinut îl scădem din cel iniţial obţinând 2005. Care este numărul?

11. Fie n cel mai mic număr natural nenul cu proprietăţile: $2n$ este pătrat perfect, iar $3n$ este cub perfect. Aflaţi numărul divizorilor proprii ai numărului n.

12. Aflaţi exponentul lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului $31 \cdot 32 \cdot \ldots \cdot 50$.

13. Suma a doi multipli consecutivi, de trei cifre, ai lui 13 este un număr ce are exact nouă divizori. Care este cel mai mare dintre cei doi multipli?

14. La înmulţirea a două numere naturale, un elev a greşit un factor astfel: cifra sutelor a mărit-o cu 3, cifra zecilor a micşorat-o cu 2, iar cifra unităţilor a mărit-o cu 1. În consecinţă, rezultatul înmulţirii a fost 136 234. Găsiţi numerele ştiind că produsul iniţial este 63 455.

15. Aflaţi numărul maxim al posibilităţilor de completare a pătratului cu numere naturale astfel încât suma elementelor de pe orice linie şi orice coloană să fie 2005.

1		
	1	
		1

Clasa a VI-a

1. Care este cel mai mare număr natural de cinci cifre distincte care se divide cu 25?

2. Câte numere naturale de forma $\overline{abc}$, scrise în baza 10, au proprietatea că $abc = 30$?

3. Care este suma primelor 50 de zecimale ale fracţiei $\frac{19}{22}$?

4. Raportul lungimilor a două laturi ale unui triunghi isoscel este $\frac{1}{3}$. Care este raportul dintre baza şi perimetrul triunghiului?

5. Cât este suma
$$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+99}\ ?$$

6. Numerele 1330 şi 344, împărţite la un acelaşi număr natural n, dau resturile 10, respectiv 8. Care este cea mai mică valoare posibilă a lui n?

7. Care sunt numerele naturale nenule x, y, z cu $x+y+z \leq 30$, dacă numerele $(x+y; y-x; 20)$ sunt direct proporţionale cu $(8; 3; z)$?

8. Care este numărul soluţiilor (x, y), cu $x, y \in \mathbb{N}$, ale ecuaţiei $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$?

9. Se consideră 4 semidrepte cu aceeaşi origine. Care este numărul maxim de unghiuri obtuze pe care le determină?

10. Unghiul $\widehat{xOy}$ are măsura, în grade, număr natural. Semidreapta $[Oz$, interioară unghiului, formează cu laturile acestuia unghiuri de măsuri $a^\circ b'$, respectiv $b^\circ a'$, cu $a, b \in \mathbb{N}$, $a, b \leq 59$. Care este $m(\widehat{xOy})$?

11. Trei pisici mănâncă trei şoareci în o oră şi jumătate. În cât timp 10 pisici mănâncă 20 de şoareci?

12. La o peterecere la care participă, Ioana cunoaşte pe toţi cei prezenţi, pe unii după nume, pe alţii după înfăţişare. Ea cunoaşte după nume şi în acelaşi timp după înfăţişare pe 50% dintre cei prezenţi (afară de ea), după înfăţişare pe 80% dintre cei prezenţi (afară de ea), iar după nume cunoaşte 63 de persoane (afară de ea). Câte persoane au participat la petrecere?

13. Fie $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2005\}$. Din mulţimea A alegem, la întâmplare, un număr oarecare de elemente. Care este probabilitatea ca produsul elementelor alese să fie egal cu produsul elementelor rămase nealese în A?

14. Pentru un număr natural n, prin *lungime* înţelegem numărul de factori din scrierea lui n ca produs de numere prime. De exemplu, numărul 90 are lungimea 4, întrucât $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Câte numere cel mult egale cu 100 au lungimea 3?

15. Avem 10 plăci dreptunghiulare de dimensiuni 1 cm $\times$2 cm. Folosind un număr oarecare de plăci, formăm un dreptunghi; îl stricăm, apoi formăm alt dreptunghi, cu alte dimensiuni etc. Formăm astfel toate dreptunghiurile diferite posibile (pătratul este dreptunghi!). Care este suma perimetrelor tuturor?

Clasele VII-XII, 12 martie 2005

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru: 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă 7 puncte.

Clasa a VII-a

1. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{4n^2 + 13n + 4} \in \mathbb{Q}$.

***

2. Fie $ABCD$ un paralelogram şi punctul O situat în interiorul triunghiului ABD. Considerăm $OQ \parallel AD$, $Q \in [CD]$, $\{M\} = OQ \cap BD$, $OP \parallel AB$, $P \in [BC]$, $OP \cap BD = \{N\}$. Arătaţi că $A_{OMN} = A_{MQD} + A_{BPN}$ dacă şi numai dacă segmentele $[MN]$, $[MD]$ şi $[NB]$ sunt laturile unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza $[MN]$.

Petru Asaftei

3. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic şi H ortocentrul său. Notăm cu M mijlocul segmentului $[BC]$ şi cu N mijlocul segmentului $[AH]$. Demonstraţi că $MN = BC$ dacă şi numai dacă $m(\hat{A}) = 30°$.

Adrian Zanoschi

4. Fie $a, n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că există o infinitate de valori $b \in \mathbb{N}$ astfel încât $a \mid b$; $a + 1 \mid b + 1$; $\ldots$; $a + n \mid b + n$.

Gheorghe Iurea

Clasa a VIII-a

1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm numărul $N(n) = n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)+120$.
a) Arătaţi că $N(n)$ se divide cu $(n + 5)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
b) Arătaţi că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât numărul $\dfrac{N(n)}{n}$ să fie pătrat perfect.

Artur Bălăucă, Doru Turbatu

2. Fie a un număr real pozitiv, fixat. Considerăm expresia

$$E(x, y) = \frac{\sqrt{a - x} - \sqrt{a + x}}{\sqrt{a - y} + \sqrt{a + y}},$$

unde x şi y sunt numere reale care verifică relaţia $x^2 + y^2 = a^2$. Determinaţi minimul şi maximul expresiei $(E\,(x, y))^n$, pentru $n \in \{1, 2, 3\}$.

Dan Popescu

3. Fie unghiul diedru $(\alpha; \beta)$ cu măsura mai mică de $45°$. În interiorul diedrului considerăm punctele fixe A şi B. Fie C simetricul lui B faţă de α, iar D simetricul lui C faţă de β. Notăm $\{E\} = AD \cap \beta$ şi $\{F\} = EC \cap \alpha$. Să se arate că, oricare ar fi punctele M şi N, $M \in \beta$, $N \in \alpha$, avem $AE + EF + FB \le AM + MN + NB$.

Petru Asaftei

4. Arătaţi că pentru orice $n \ge 2$, $n \in \mathbb{N}$ există $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - a_1 - 2a_2 - \cdots - na_n = 0.$$

Gheorghe Iurea

Clasa a IX-a

1. Se consideră numerele reale a, b, c diferite de -1 cu $abc = 1$. Să se arate că dacă $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} + \dfrac{1}{c+1} = \dfrac{3}{2}$, atunci unul din numerele a, b, c este egal cu 1.

Gabriel Mîrşanu, Andrei Nedelcu

2. Fie ABC un triunghi de laturi $a = BC$, $b = CA$ şi $c = AB$. Un punct P interior triunghiului are proprietatea că pentru orice dreaptă d ce trece prin P şi intersectează dreptele AB şi AC în punctele distincte E respectiv F avem $\dfrac{1}{AE} + \dfrac{1}{AF} = \dfrac{a+b+c}{bc}$. Să se arate că P este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Gheorghe Iurea, Petru Raducanu

3. a) Să se determine numărul de şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ având termeni întregi cu proprietatea $a_n \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} = -1$, oricare ar fi $n \geq 1$.

b) Să se demonstreze că nu există şiruri $(a_n)_{n\geq 1}$ având termeni întregi astfel încât $a_n \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} = 2005$ pentru orice $n \geq 1$.

Dinu Şerbănescu

4. Fie $p > 2$ un număr prim şi q un număr natural nedivizibil cu p. Să se arate că

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[(-1)^k \cdot k^2 \cdot \frac{q}{p} \right] = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Dorin Andrica, Titu Andreescu

Clasa a X-a

1. i) Arătaţi că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ în progresie aritmetică astfel încât media aritmetică a oricăror k dintre ele $(1 \leq k \leq n)$ să fie număr natural.

ii) Stabiliţi dacă există un şir strict crescător de numere naturale, cu proprietatea că media aritmetică a oricăror n $(n \in \mathbb{N}^*)$ termeni ai şirului să fie număr natural.

Gheorghe Iurea

2. Fie ABC un triunghi cu $m(\hat{A}) < 90°$. În exteriorul triunghiului ABC se consideră punctele D şi E, astfel încât $DA = DB$, $EA = EC$ şi $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{AEC}) = 2\,m(\widehat{A})$. Demonstraţi că simetricul punctului A faţă de mijlocul segmentului DE este centrul cercului circumscris lui ABC.

Adrian Zanoschi

3. Fie $a, b, c \in (0, \infty)$, cu $a + b + c = 1$. Demonstraţi inegalitatea:

$$\log_a(a^2+b^2+c^2)+\log_b(a^2+b^2+c^2)+\log_c(a^2+b^2+c^2) \leq a\log_a abc+b\log_b abc+c\log_c abc.$$

Gabriel Popa

4. Într-o noapte, străzile unei localităţi cu 2004 case au fost acoperite cu zăpadă. Demonstraţi că se pot face poteci între case astfel încât să existe câte două case din care pornesc n poteci, pentru fiecare $n = 1, 2, \ldots, 1002$.

* * *

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2005 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Să se arate că există $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $D^{2005} = BA$.

Dinu Şerbănescu

2. Fie $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ o matrice nesingulară cu proprietăţile: $\det(A + {}^tA) = 5 \det A$ şi $\det(A - {}^tA) = \det A$. Să se arate că pentru orice rădăcină nereală ω de ordinul cinci a unităţii are loc relaţia $\det(\omega A + {}^tA) = 0$.

Dan Popescu

3. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încât $\left(\dfrac{x_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ este un şir mărginit. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{n} = 0$.

Dorin Andrica, Mihai Piticari

4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere iraţionale strict pozitive.

a) Să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dezvoltarea binomială $(1 + a_n)^n$ admite un unic termen maxim şi să se determine rangul $r_n \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ al acestuia.

b) Considerăm şirurile $x_n = a_n\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi $y_n = (1+a_n)^{r_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

Eugen Păltânea

Clasa a XII-a

1. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea că există o constantă reală c, astfel încât pentru oricare $x \in [a, b]$ există $y \in [a, b] \setminus \{x\}$cu $\int\limits_x^y f(t)dt = c$. Să se arate că funcţia f are cel puţin două zerouri în intervalul (a, b).

Eugen Păltânea

2. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare. Arătaţi că, dacă

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt\right) dx = 0,$$

atunci $f(x) = 0$, $\forall x \in (0, 1)$.

Mihai Piticari

3. Determinaţi funcţiile continue $f : [0, 1] \to [0, 2]$, care au proprietatea

$$\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} xf(x)\,dx\right)^2 = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} x^2 f(x)\,dx, \quad \forall n \in N^*.$$

Gabriel Mîrşanu, Andrei Nedelcu

4. Fie K un corp finit şi $f : K \to K^*$. Să se arate că există $P \in K[X]$ reductibil, astfel încât $P(x) = f(x)$, $\forall x \in K$.

Marian Andronache