# Concursul de matematică "Florica T. Câmpan"
## Etapa judeţeană, 5 - 6 mai 2005

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: cl. a IV-a – 90 de minute, cl. V-VIII – 2 ore.

### Clasa a IV-a

**1.** Să se afle două numere naturale ştiind că al doilea este cu 8 mai mare decât dublul primului număr, iar diferenţa dintre împătritul primului număr şi sfertul celui de-al doilea număr este 712.

**2.** Separaţi 2300 de grame de zahăr dintr-o cantitate de 10 kilograme (1 kg = 1000 g) având la îndemână o balanţă cu două braţe şi doar două greutăţi: una de 500 de grame şi cealaltă de 100 de grame.

Efectuaţi doar două cântăriri. Explicaţi cum procedaţi la fiecare cântărire.

**3.** Câte numere de forma $\overline{abc}$ satisfac egalitatea $\overline{abc} - \overline{cba} = 297$? Justificaţi răspunsul!

### Clasa a V-a

**1.** Suma a două numere este 92. Primul are exact doi divizori, iar al doilea are exact trei divizori. Adunând cei cinci divizori obţinem 101. Aflaţi numerele.

**Monica Nedelcu**

**2.** Într-un bloc cu nouă etaje, care are la parter un supermarket, locuiesc nouă familii, câte una la fiecare etaj. Ştiind că la etajul al II-lea locuiesc patru persoane, la etajul al VII-lea locuiesc şase persoane, iar suma persoanelor de pe orice trei etaje consecutive este 15, să se afle câte persoane locuiesc în tot blocul. Dar la fiecare etaj? Justificaţi.

**3.** Lucian-Georges şi Andrei iau pe rând bomboane dintr-un pachet. Primul copil ia o bomboană, al doilea două, apoi primul ia trei, al doilea patru şi aşa mai departe. Când numărul de bomboane rămase în pachet este mai mic decât cel necesar, atunci cel căruia îi vine rândul ia toate bomboanele. Câte bomboane au fost la început în pachet, dacă primul copil a luat 101 bomboane?

**Cristian - Cătălin Budeanu**

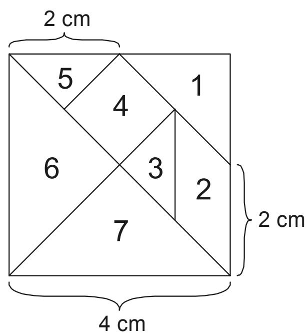
### Clasa a VI-a

**1.** Pătratul din figura alăturată are latura de 4 cm şi este compus din şapte figuri geometrice numerotate de la 1 la 7. Cerinţe:

*a*) Printr-o reaşezare a celor şapte figuri componente, transformaţi pătratul într-un dreptunghi. Ilustraţi grafic.

*b*) Printr-o nouă reaşezare a celor şapte figuri componente, transformaţi dreptunghiul într-un triunghi. Ilustraţi grafic.

**Constanţa Tudorache**




**2.** Orarul, minutarul şi secundarul unui ceasornic formează (în această ordine) trei unghiuri în jurul axului ceasului, ale căror măsuri sunt direct proporţionale cu numerele 4, 3 şi 5. Cerinţe:

*a*) Dacă secundarul indică cifra 3 a ceasului, aflaţi cât este ora.
*b*) Peste câte secunde cele trei unghiuri devin congruente?

**Monica Nedelcu**

**3.** Un florar are flori având preţurile exprimate prin numerele naturale $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{3n}$, nici unul dintre acestea nefiind divizibil cu 3. La sfârşitul zilei constată că a vândut din fiecare fel un număr de flori egal cu preţul respectivei flori. Mai constată că suma încasată în acea zi o poate împărţi în mod egal celor trei fii ai săi. Demonstraţi că acest lucru este posibil oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

**Mihaela Cianga, Ionel Nechifor**

## Clasa a VII-a

**1.** Fie numerele naturale nenule $a$, $b$, $x$ şi $y$ astfel încât $a$ şi $b$ sunt invers proporţionale cu $x$ şi $\frac{1}{y}$.
*a*) Dacă numerele $a$, $x$ şi $y$ sunt diferite două câte două, să se arate că $b$ are cel puţin patru divizori.
*b*) Aflaţi numerele $x$ şi $y$ ştiind că $a + b = 7$.

**Claudiu - Ştefan Popa**

**2.** Un număr natural se numeşte *pătrat de două ori perfect* dacă este pătrat perfect şi, în plus, putem intercala o cifră între cifrele sale astfel încât numărul obţinut să fie tot pătrat perfect.
*a*) Determinaţi pătratele de două ori perfecte de două cifre.
*b*) Determinaţi cel mai mic pătrat de două ori perfect de trei cifre.
*c*) Arătaţi că 1296 este pătrat de două ori perfect.

**Gabriel Popa**

**3.** În $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC$, există $D \in (AC)$ astfel încât să se formeze trei triunghiuri isoscele cu vârfurile în punctele $A$, $B$, $C$ sau $D$.
*a*) Aflaţi măsurile unghiurilor $\triangle ABC$.
*b*) Arătaţi că $\frac{AB}{AD} - \frac{AD}{AB} = 1$.

## Clasa a VIII-a

**1.** *a*) Aflaţi $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\frac{2x+1}{3x-2} \in \mathbb{Z}$.
*b*) Aflaţi $x \in \mathbb{Q}$ pentru care $\frac{2x+1}{3x-2} \in \mathbb{Z}$.
*c*) Aflaţi $x \in \mathbb{Q}$ pentru care $\frac{2x+1}{3x-2} \in \mathbb{Q}$.

**2.** Putem dispune numerele $1, 2, 3, \ldots, 9$ în vârfurile unui cub şi în centrul acestuia astfel încât numărul din centrul cubului să fie media aritmetică a numerelor din vârfurile diagonal opuse, iar suma numerelor de pe feţe să fie aceeaşi?

**Gheorghe Iurea**

**3.** Din cubuleţe de latură 1 se construieşte un cub de latură 45. În cubul mare obţinut, 2005 cubuleţe sunt populate de bacterii. În fiecare secundă bacteriile se extind în oricare alt cubuleţ care are cel puţin trei feţe comune cu cubuleţele deja populate. Este posibil ca, la un anumit moment, bacteriile să ocupe toate cubuleţele?

## Faza interjudeţeană, 9 aprilie 2005

**Notă.** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: cl. a IV-a – 90 de minute, cl. V-VIII – 3 ore.

### Clasa a IV-a

**1.** *a*) Găseşte regula şi completează numărul lipsă:

$$\begin{array}{ccccc} 13 & 25 & 34 & 45 & 67 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & - \end{array}.$$

*b*) În două plicuri am 38 timbre. Dacă dublez numărul timbrelor din primul plic, luând timbre din al doilea plic, îmi rămân în acesta cu 6 timbre mai mult decât în primul. Câte timbre am în fiecare plic?

**2.** Dacă elevii unei clase se aşază câte 2 în fiecare bancă, rămân 4 elevi în picioare, iar dacă se aşază câte 4, rămân 6 bănci libere şi o bancă cu 2 elevi. Aflaţi:
*a*) numărul băncilor; *b*) numărul elevilor.

**3.** La un meci de hochei o echipă participă cu 6 jucători şi 12 rezerve. Toţi cei 18 jucători au jucat în mod egal (schimbările la hochei se fac nelimitat). Câte minute a jucat fiecare jucător, dacă meciul a durat o oră?

### Clasa a V-a

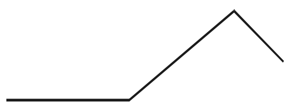
**1.** Să se găsească cel mai mic număr divizibil cu 2005 şi care are exact 2005 divizori.

**Monica Nedelcu, Iaşi**

**2.** Se dau mulţimile $A = \{0, 4, 7, x\}$ şi $B = \{1, 5, x\}$. Găsiţi $x \in \mathbb{N}$ astfel ca mulţimea $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ să aibă un număr minim de elemente.

**Monica Nedelcu, Iaşi**

**3.** Cezar se antrenează pentru un concurs de atletism. În fiecare zi parcurge un traseu asemănător cu cel din figură, dus-întors, în total 5 ore. Ştiind că viteza pe drum drept este de 4 km/h, la urcare este 3 km/h, iar la coborâre 6 km/h, să se afle câţi kilometri parcurge elevul zilnic.



**Valerica Benţa, Adriana Păduraru, Iaşi**

**4.** Lucian are patru coşuri, fiecare conţinând acelaşi număr, mai mic decât 300 de bomboane. Din primul coş el umple punguţe cu câte 13 bomboane, atâta timp cât poate, din al doilea coş umple punguţe cu câte 16 bomboane, din al treilea coş umple punguţe de câte 19 bomboane, iar din ultimul, punguţe de câte 21 de bomboane. De fiecare dată îi rămâne un rest în coşuri, dar la sfârşit constată că din bomboanele rămase nu poate să umple o punguţă de 10 bomboane. Câte bomboane conţinea fiecare coş şi câte bomboane au rămas în fiecare coş?

**Cristian - Cătălin Budeanu, Iaşi**

### Clasa a VI-a

**1.** În fiecare an, un negustor cheltuieşte 100 de lire sterline pentru întreţinerea familiei, dar îşi sporeşte restul averii cu o treime. După trei ani constată că şi-a dublat averea. Câţi bani a avut la început? (*O problemă a lui Isaac Newton*)

**2.** Fie triunghiul ascuţitunghic $ABC$ cu $AB \neq BC$. Perpendiculara dusă din $C$ pe bisectoarea interioară a unghiului $\widehat{B}$ o intersectează pe aceasta în $M$. Demonstraţi că paralela dusă prin $M$ la $AB$ trece prin mijloacele segmentelor $[AC]$ şi $[BC]$.

**Luca Tuţă, Buzău**

**3.** În jurul punctului $O$ se construiesc unghiurile $O_1, O_2, O_3, \ldots, O_n$, oricare două consecutive adiacente, de măsuri (în grade) proporţionale cu numerele $1, 2, 3, \ldots, n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$. Aflaţi câte unghiuri se pot construi, precum şi măsurile lor.

**Constanţa Tudorache, Iaşi**

**4.** Fie $x$, $y$, $z$ trei numere prime distincte. Arătaţi că:

*a*) $30\,(xy + yz + zx) \leq 31\,xyz$;

*b*) $3\,(x + y)\,(y + z)\,(z + x) < (xyz)^2$.

**Marius Ghergu, Slatina**

## Clasa a VII-a

**1.** Considerăm $\triangle ABC$ isoscel cu $AB = AC = 25$, iar $BC = n$, $n \in \mathbb{N}$.

*a*) Câte triunghiuri de acest tip există?

*b*) Daţi exemplu de 4 valori ale lui $n$ pentru care aria triunghiului se exprimă printr-un număr raţional şi de 4 valori pentru care aria se exprimă printr-un număr iraţional.

**Gabriel Popa, Iaşi**

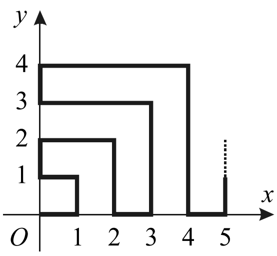
**2.** Considerăm $\triangle OAB$ cu $m(\widehat{O}) = 90°$, cu catetele de lungimi $a$ şi $b$.

*a*) Determinaţi latura pătratului $OMNP$, unde $M \in (OA)$, $N \in (AB)$, $P \in (OB)$.

*b*) Arătaţi că există o infinitate de triunghiuri $OAB$ cu $a, b \in \mathbb{N}$, pentru care latura pătratului este număr natural.

**Mihaela Cianga, Iaşi**

**3.** Fie $ABCD$ dreptunghi cu $AB = 9$ cm, $BC = 6$ cm, pe care îl împărţim în 9 dreptunghiuri 3 cm $\times$2 cm. O furnică pleacă din $A$ şi trece prin toate vârfurile dreptunghiurilor mici, revenind în final în $A$. Aflaţi lungimea minimă a drumului parcurs de furnică.



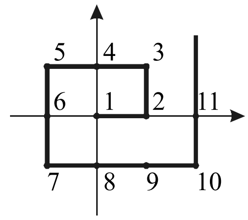

**4.** O particulă se deplasează pe o reţea ca în figura alăturată; primul pas îl face din origine în punctul $(1, 0)$. Fiecare pas durează o secundă.

*a*) După câte secunde descrie 2005 pătrate?

*b*) În ce punct se găseşte după 2005 secunde?

**Mihaela Cianga, Iaşi**

## Clasa a VIII-a




**1.** Într-un reper cartezian se construieşte o spirală ca în figură, numerotând cu $1, 2, 3, 4, 5\ldots$ punctele de coordonatele $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, $(-1,1)$, $\ldots$ Ce coordonate are al 2005-lea punct?

**2.** Legenda spune că, la facerea lumii, Creatorul a plantat un arbore cu 7 crengi, pe fiecare creangă aflându-se câte 27 de frunze. Frunzele cresc alternativ, câte una pe fiecare creangă, astfel încât la începutul celui de-al $n$-lea an, numărul de frunze al arborelui este $4^{3n} + 5^{3n}$. Marele

Vraci numără frunzele de pe fiecare creangă şi, dacă găseşte acelaşi număr de frunze pe fiecare, ştie că anul care tocmai a început va fi un an bun. Anul 2005 de la facerea lumii este un an bun? Care sunt anii buni?

**Gabriel Popa, Iaşi**

**3.** Câte numere cuprinse între $10^2$ şi $10^4$ au suma cifrelor 9?

**Enache Pătraşcu, Focşani**

**4.** Fie $A_1A_2A_3A_4$ un pătrat de centru $A_0$. Silviu aşează în punctele $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ cinci jetoane pe care sunt scrise numerele $0, 1, 2, 3, 4$. El are dreptul să efectueze permutări ale jetoanelor după regula: dacă în vârful $A_i$ se află numărul $j$, atunci Silviu va face aşa încât în $A_i$ să aşeze jetonul care se afla în $A_j$. O permutare impune ca Silviu să acţioneze asupra tuturor celor 5 jetoane. Să se arate că oricare ar fi distribuţia iniţială a jetoanelor, după 120 de permutări se ajunge la aşezarea $A_0 \to 0$, $A_1 \to 1$, $A_2 \to 2$, $A_3 \to 3$, $A_4 \to 4$.

**Cristian Lazăr, Iaşi**

---

# Recreaţii ... matematice

Un profesor stabileşte în clasă următoarea inegalitate:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Pentru verificarea cunoştinţelor, în lecţia următoare dă elevilor o lucrare de control:

*Arătaţi că* $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx, \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Un elev "demonstrează" inegalitatea astfel: notăm $x$ cu $a$, $y$ cu $b$ şi $z$ cu $c$ şi inegalitatea devine una cunoscută.

*Ce părere aveţi?*

*

* *

*Răspunsul la problema de la pag. 111.*

Observăm că unui grup de egalităţi alese îi corespunde o submulţime a mulţimii $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$. Pot fi atâtea preferinţe câte astfel de submulţimi există, adică $2^{11} = 2048$.

Iată şi alte moduri de a scrie numerele $0, 1, 2, \ldots, 10$:

$0 = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 5$
$1 = (2 + 0!)! - 0! \cdot 5$
$2 = 2^{0!} + 0 \cdot 5 = 2 + 0 + 0 \cdot 5$
$3 = (2! + 0!)^{(0 \cdot 5)!}$
$4 = 2 + 0! + (0!)^5$
$5 = 2 \cdot 0 + 0! \cdot 5$
$6 = 2 \cdot 0 + 0! + 5$
$7 = 2! + 0! \cdot 0 + 5$
$8 = 2^{0!} + 0! + 5$
$9 = 2^{0! + 0!} + 5$
$10 = 2^{0!} \cdot 0! \cdot 5$

Incercaţi şi singuri!