Concursul de matematică "Al. Myller"

Ediţia a II-a, Iaşi, martie 2004

Notă (*pentru clasele IV-VI*). Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru 90 min. Se acordă din oficiu 30 puncte, câte 6 puncte pentru problemele 1-5, câte 8 puncte pentru problemele 6-10 şi câte 10 puncte pentru problemele 11-15.

Clasa a IV-a

1. Un elev rezolvă fiecare dintre primele 5 probleme ale acestui test în câte 3 minute, iar pe fiecare dintre următoarele 5 în câte 5 minute. Câte minute îi trebuie pentru a rezolva una dintre ultimele 5 probleme, presupunând că fiecare din ele îi solicită acelaşi timp? (timpul total de lucru este 1h 30 min.)

2. Calculează $(100-99)+(98-97)+(96-95)+\cdots+(2-1)$.

3. Calculează $(5+55+555+5555+55555):(1+1+111+1111+11111):5$.

4. Cei 41 de elevi ai unei clase urcă în şir pe munte. Mircea observă că în faţa lui sunt un sfert dintre colegii săi. Al câtălea în şir este Mircea?

5. Delia calculează suma cifrelor pe care le afişează ceasul ei digital (de exemplu la ora 14:28 ea obţine $1+4+2+8=15$). Care este suma maximă pe care o poate obţine?

6. Care sunt ultimele trei cifre ale numărului $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2004+12$?

7. Aflaţi suma dintre deîmpărţit, împărţitor, cât şi rest, ştiind că restul este cu 18 mai mic decât câtul, câtul este 25, deîmpărţitul este impar, iar împărţitorul are o singură cifră.

8. Un număr se împarte la 3 şi dă restul 2. Câtul se împarte din nou la 3, obţinând restul 2. Noul cât se împarte iar la 3 şi găsim câtul 2 şi restul 2. Care a fost numărul iniţial?

9. La un magazin se aduc 301 kg de mere în lăzi de 25 kg şi 21 kg. Câte lăzi se folosesc în total?

10. 58 de elevi sunt aşezaţi pe 4 rânduri, fiecare rând având cu 3 elevi mai puţin decât rândul din faţa sa. Câţi elevi sunt pe ultimul rând?

11. Dan vrea să cumpere mingi. Dacă ar cumpăra 5, i-ar mai rămâne 100 000 lei, iar dacă ar dori să cumpere 7, ar mai avea nevoie de 220 000 lei. Cât costă o minge?

12. Marinarii de pe un vapor au hrană pentru 60 de zile. Ei găsesc pe o insulă 30 de naufragiaţi şi astfel hrana le va ajunge tuturor doar 50 de zile. Câţi marinari erau pe vapor?

13. 12 băeţi şi 8 fete sunt membri ai cercului de matematică. În fiecare săptămână, încă 2 fete şi 1 băiat sunt acceptaţi ca membri ai cercului. Câţi membri va avea cercul de matematică atunci când numărul băieţilor va fi egal cu numărul fetelor?

14. Câte numere naturale de patru cifre au ultima cifră 3?

15. Pe o insulă locuiesc numai arici, şerpi şi vulpi. Fiecare animal mănâncă o dată pe zi, astfel încât orice arici mănâncă la micul dejun câte un şarpe, orice vulpe mănâncă la prânz câte un arici, iar orice şarpe mănâncă la cină câte o vulpe. La sfârşitul zilei de miercuri, pe insulă a rămas un singur animal. Câte animale existau pe insulă luni, înainte de micul dejun?

Clasa a V-a

1. Să se calculeze suma $4+8+12+\cdots+2000$.

2. Determinaţi numerele naturale x astfel încât mulţimile $A=\{2x;6x+4;3x+5\}$ şi $B=\{2x-1;2x+1;5x+6\}$ să aibă un singur element comun.

3. Care sunt numerele prime a, b, c pentru care $a+10\cdot b+12\cdot c=82$?

4. Aflaţi suma cifrelor numărului $A=10^{2004}-1$.

5. Să se determine perechile de numere naturale (x,y) pentru care fracţia $\dfrac{15}{(x+1)(y-4)}$ este echiunitară.

6. Să se determine $x\in\mathbb{N}$ astfel încât numărul $a=5^x+5^{x+1}+5^{x+2}+5^{x+3}$ să aibă exact 48 divizori.

7. Să se calculeze suma $S=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\cdots+\dfrac{1}{360}$.

8. Aflaţi numerele $a\in\mathbb{N}$ pentru care $\dfrac{3a+16}{2a-5}\in\mathbb{N}$.

9. Care este suma ultimelor trei cifre ale produsului $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 25$?

10. Să se afle cel mai mic număr natural de 2 cifre pentru care suma dintre pătratul şi cubul lui este pătrat perfect.

11. Aşezaţi în ordine crescătoare numerele $a=2^{50}$, $b=2^{47}+2^{24}$, $c=2^{45}+2^{44}+$ $+2^{23}+2^{22}$, $d=2^{48}+2^{23}$.

12. În peşteră erau dragoni roşii şi dragoni verzi. Fiecare dragon roşu avea 6 capete, 8 picioare şi 2 cozi. Fiecare dragon verde avea 8 capete, 6 picioare şi 4 cozi. În total dragonii aveau 44 cozi. Sunt, de asemenea, cu 6 picioare verzi mai puţin decât capete roşii. Câţi dragoni roşii sunt în peşteră?

13. Dan spală o maşină în 40 de minute, iar Ionuţ spală o maşină în 2 ore. În cât timp vor spăla împreună 3 maşini?

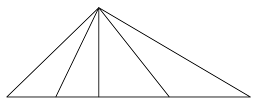
14. Dintre cei 101 de dalmaţieni, 56 au o pată neagră pe urechea stângă, 25 au pată neagră pe urechea dreaptă, iar 29 au ambele urechi albe. Câţi dalmaţieni au pete negre pe ambele urechi?

15. Fie $a=2^{214}+3^{143}$ şi $b=31^{43}$. Care dintre numere este mai mare?

Clasa a VI-a

1. Dacă $\dfrac{7a-2b}{5a+4b}=\dfrac{2}{15}$, atunci $\dfrac{b}{a}$ este ....

2. Numărul triunghiurilor din figură este ....



3. Diferenţa dintre măsurile suplementului şi complementului aceluiaşi unghi este ....

4. Rezultatul calculului $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{2003\cdot 2005}$ este ....

5. Două unghiuri complementare au raportul măsurilor lor egal cu $\dfrac{0,2(4)}{0,4(2)}$; atunci măsura unghiului mai mare este ....

6. Rezultatul calculului $\left(\overline{ab0}-\overline{ba}\right):99$ este ....

7. În câte moduri putem aşeza patru persoane într-un rând?

8. Ultima cifră a numărului $2^{2004}+3^{2004}+\cdots+9^{2004}$ este ....

9. Avem la dispoziţie timbre de 4000 lei şi de 9000 lei. Pentru a expedia o scrisoare sunt necesare timbre în valoare de 35000 lei. Numărul total de timbre este ....

10. Suplementul unui unghi şi complementul său au măsurile invers proporţionale cu 2 şi 5. Suma măsurilor lor este ....

11. Numărul maxim de unghiuri în jurul unui punct cu măsuri numere naturale diferite este ....

12. Un produs se scumpeşte cu 10% şi apoi cu 20%. Acelaşi produs se scumpeşte cu 20% şi apoi cu 10%. În ce caz preţul final este mai mare?

13. Soluţia ecuaţiei $\overline{1,(1x)} + \overline{2,(2x)} + \cdots + \overline{9,(9x)} = 50$ este ....

14. Câte cifre de 0 are la sfârşit numărul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2004$?

15. Pe o tablă de şah 4×4 se trage o linie dreaptă. Cel mai mare număr de pătrăţele 1×1 care pot fi tăiate în două părţi este ....

Notă (*pentru clasele VII-XII*). Toate subiectele sunt obligatorii. Timp efectiv de lucru 3 ore. Pentru fiecare subiect se acordă 7 puncte.

Clasa a VII-a

1. *a*) Demonstraţi că dacă m şi n sunt numere naturale, atunci $25^n - 7^m$ este divizibil cu 3.

b) Determinaţi cel mai mic număr de forma $|25^n - 7^m - 3^m|$, unde m şi n sunt numere naturale nenule.

Marius Ghergu, Slatina

2. Fie a, b două numere reale având modulele cel puţin 2. Demonstraţi că $(a^2+1)(b^2+1) \geq (a+b)(ab+1)+5$. Când are loc egalitatea?

Marius Durea, Iaşi

3. În triunghiul ABC se consideră înălţimea $[CM]$, $M \in AB$, iar N este simetricul punctului M faţă de BC. Paralela prin punctul N la CM intersectează BC în P şi AC în Q.

a) Demonstraţi că $MQ \perp AP$ dacă şi numai dacă $[AB] \equiv [AC]$.

b) Arătaţi cum pot fi obţinute poziţiile punctelor A, B, C atunci când cunoaştem doar poziţiile punctelor M, N, P.

Petru Răducanu, Iaşi

4. Se consideră un triunghi ABC, n puncte distincte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pe latura (BC), n puncte distincte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ pe latura (AC) şi n puncte distincte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ pe latura (AB). Fie M mulţimea punctelor care se obţin la intersecţia a cel puţin două din segmentele (AA_i), (BB_j), (CC_k). Determinaţi numărul minim şi numărul maxim de elemente pe care le poate avea mulţimea M.

Dan Brânzei, Iaşi

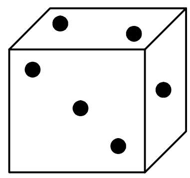
Clasa a VIII-a

1. Determinaţi numerele întregi a, b pentru care, oricare ar fi x real,

$$(2a-a^2)x^4 + (2a+2b-4)x^3 + (3b-3)x^2 + (-2b^2-2b)x + b + 2 \geq 0.$$

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Un zar este un cub de latură 1, pe feţele căruia sunt imprimate puncte ca în figură, astfel încât suma numerelor de puncte de pe feţele opuse să fie 7. Din opt zaruri alcătuim un cub de latură 2.



a) Ce valori poate avea numărul punctelor care sunt „vizibile" pe feţele cubului de latură 2?

b) Este posibil să aşezăm zarurile astfel încât oricare două feţe care sunt în contact să aibă un număr egal de puncte?

***

3. Fie $ABCD$ o piramidă în care $AC = BC = 1$ şi $AB = AD = BD = CD = \sqrt{2}$. Determinaţi distanţa de la punctul A la planul (BCD).

***

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură a şi puncte $M \in (AB)$, $N \in (CC')$, $P \in (D'A')$, astfel ca $AM = CN = D'P = x$.

a) Calculaţi MP.

b) Arătaţi că triunghiul MNP are centrul de greutate pe segmentul $[B'D]$.

Dan Brânzei

Clasa a IX-a

1. Fie n un număr natural şi numerele reale a, b, c astfel încât $a^n = a + b$; $b^n = b + c$ şi $c^n = c + a$. Să se arate că $a = b = c$.

Gheorghe Iurea, Iaşi

2. Pe laturile $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ ale unui patrulater convex $ABCD$ se consideră punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NB}{NC} = \dfrac{PD}{PC} = \dfrac{QA}{QD} = k$, unde $k \neq 1$. Să se arate că $S_{[ABCD]} = 2S_{[MNPQ]}$ dacă şi numai dacă $S_{[ABD]} = S_{[BCD]}$.

Petre Asaftei, Iaşi

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A şi D un punct aparţinând laturii $[BC]$. Bisectoarele unghiurilor $\angle ADB$ şi $\angle ADC$ intersectează laturile AB şi AC în punctele M şi N. Să se arate că unghiul dintre dreptele BC şi MN are măsura $\dfrac{1}{2}\left|m(\widehat{B}) - m(\widehat{C})\right|$ dacă şi numai dacă D este piciorul perpendicularei din A.

Bogdan Enescu, Buzău

4. Să se determine numerele reale x, $x > 1$ pentru care $\sqrt[n]{[x^n]}$este întreg, oricare ar fi $n \geq 2$. (Se notează cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a).

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc, Dan Popescu, Suceava

Clasa a X-a

1. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcţiilor $f : A \to A$ cu proprietatea că nu există numere distincte $a, b, c \in A$ astfel încât $f(a) = f(b) = f(c)$.

Adrian Zanoschi, Iaşi

2. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care medianele din A în triunghiurile ABC, ABD şi ACD sunt perpendiculare două câte două. Să se arate că muchiile din A sunt egale.

Dinu Şerbănescu, Bucureşti

3. Se consideră numerele reale x, y, z cu proprietatea că $\cos x + \cos y + \cos z = 0$ şi

$\cos 3x + \cos 3y + \cos 3z = 0$. Să se demonstreze inegalitatea $\cos 2x \cdot \cos 2y \cdot \cos 2z \leq 0$.

Bogdan Enescu, Buzău

4. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Considerăm mulţimea $A = \{\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a}, \sqrt[5]{a}, \ldots\}$.

a) Să se arate că A nu conţine o progresie geometrică infinită neconstantă.

b) Să se arate că pentru orice $n \geq 3$, există n elemente din A care sunt în progresie geometrică.

Bogdan Enescu, Buzău

Clasa a XI-a

1. *a*) Fie (x_n) un şir de numere reale, cu proprietatea $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că şirul (x_n) este convergent.

b) Să se construiască un şir de numere reale (y_n), care să aibă simultan proprietăţile:

(*i*) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n) = 0$; (*ii*) (y_n) este mărginit; (*iii*) (y_n) este divergent.

Eugen Popa, Iaşi

2. Se dă paralelogramul $ABCD$, cu laturi inegale. Vârful B se proiectează pe AC în punctul E. Perpendiculara în E pe BD intersectează dreptele BC şi AB în punctele F, respectiv G. Să se arate că $EF = EG$ dacă şi numai dacă $m(\widehat{ABC}) = 90°$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

3. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det B = 1$. Să se arate că dacă $\det(A^3 + B^3) = 1$, atunci $A^2 = O$.

Mircea Becheanu, Bucureşti

4. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea lui Darboux. Să se arate că dacă f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, atunci f este continuă.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

Clasa a XII-a

1. Fie p un număr prim, $p > 3$. Să se arate că ecuaţia $(x+y)^{-1} = x^{-1} + y^{-1}$ are soluţii în corpul $\mathbb{Z}_p$ dacă şi numai dacă 3 divide $p - 1$.

Mihai Piticari, C-lung Moldovenesc

2. Să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\ln\left(1+\frac{j}{n}\right)}{\sqrt{n^4+i^2+j^2}}.$$

Gabriel Mîrşanu şi Andrei Nedelcu, Iaşi

3. Fie $n \geq 3$ un număr impar şi A un inel comutativ cu $3n$ elemente. Să se arate că numărul elementelor nilpotente ale lui A este cel mult n. (Elementul $a \in A$ se numeşte nilpotent dacă $a^n = 0$, pentru $n > 0$ convenabil).

***

4. Să se arate că, pentru orice număr natural p,

$$\lim_{n\to\infty} n^{p+1} \int_0^1 e^{-nx} \ln(1+x^p)\, dx = p!.$$

Gheorghe Iurea, Iaşi