Concursul “Adolf Haimovici”, ediţia a VIII-a

pentru liceele economice, industriale şi agricole

Faza interjudeţeană, Iaşi, 8 - 9 mai, 2004

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.

Clasa a IX-a

1. *a*) Se dă graficul funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax + a$, din figura 1. Cât este a?

b) În figura 2 sunt reprezentate graficele a trei trinoame de gradul al doilea. Pot să fie acestea următoarele trinoame: $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$? Aceeaşi întrebare pentru figura 3.

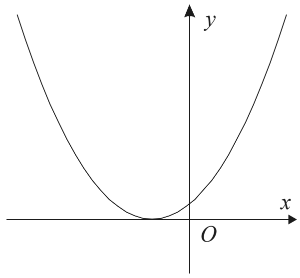


Figura 1.

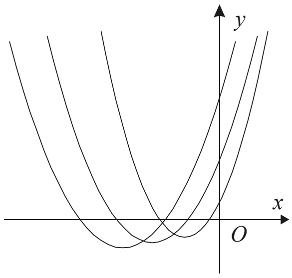


Figura 2.

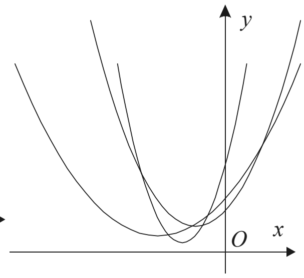


Figura 3.

c) Se consideră trinoamele de gradul al doilea de forma $x^2 + px + q$, $p, q \in \mathbb{Z}$ şi $p + q = 30$. Care dintre ele au rădăcini întregi?

2. Se dă triunghiul ABC în care $AB = 3$, $AC = 4$ şi $BC = 5$.

a) Să se calculeze aria triunghiului ABC.

b) Să se afle raza cercului înscris şi raza cercului circumscris triunghiului.

c) Să se calculeze $\sin B$, $\cos B$, $\sin 2B$, $\cos 2B$.

d) Să se arate că $\cos nB \in \mathbb{Q}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

e) Argumentaţi că $\cos nB \neq 0$ şi că există o infinitate de numere naturale n cu proprietatea că $\cos nB > 0$.

3. *a*) Să se arate că $(n+1)^2 - (n+2)^2 - (n+3)^2 + (n+4)^2 = 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, există $n \in \mathbb{N}$ şi o alegere convenabilă a semnelor $+$ şi $-$ astfel încât $k = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm ... \pm n^2$.

Clasa a X-a

1. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2004$ şi $|z_1 + z_2 + z_3| = 2004$. Atunci $(z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3) = 0$.

2. Codul Morse, care a fost mult utilizat în comunicaţii telegrafice, a utilizat punctele şi liniile pentru a codifica anumite caractere. De exemplu E se codifică printr-un punct, T printr-o linie, zero prin 5 linii etc. Câte caractere se pot codifica prin cel mult 5 semnale Morse (puncte sau linii)?

3. Se consideră polinoamele $f = 8X^3 - 6X - 1$, $g = 4X^3 - 3X$.

a) Să se arate că f nu are rădăcini raţionale.

b) Să se afle câtul şi restul împărţirii lui f la g.

c) Arătaţi că $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=0$.

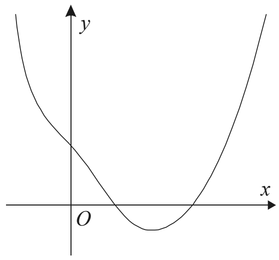
d) Este $\cos\frac{\pi}{9}$ iraţional? Argumentaţi.

e) Dacă $h\in\mathbb{Q}[X]$ şi $h\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=0$, să se arate că $h\,\vdots\, f$.

Clasa a XI-a

1. Se dă graficul funcţiei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=ax^4-x^2+bx+c.$$



Să se afle semnele numerelor a, b şi c.

2. Fie dreptele d_1 şi d_2 perpendiculare în A. Un punct F aşezat în interiorul unuia din unghiurile formate de cele două drepte, este situat la distanţele 1 şi respectiv 8 faţă de acestea. Să se determine lungimea minimă a unui segment $[BC]$ ($B\in d_1$, $C\in d_2$) care trece prin punctul F.

3. Fie mulţimile $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\mid a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$ şi $\mathcal{K}=\left\{n\in\mathbb{N}\mid n=a^3+b^3+c^3-3abc;\ a,b,c\in\mathbb{N}\right\}$.

a) Să se arate că dacă $A,B\in\mathcal{M}$, atunci $AB\in\mathcal{M}$.

b) Pentru orice $m,n\in\mathcal{K}$, avem $mn\in\mathcal{K}$.

c) Există o matrice $E\in\mathcal{M}$ cu proprietatea că $\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=aI_3+bE+cE^2$, $\forall a,b,c\in\mathbb{N}$?

d) Fie $A\in\mathcal{M}$, nesingulară, cu $d=\det A$. Să se arate că

$$\det\underbrace{\left(\left(\ldots\left(\left(A^*\right)^*\right)^*\ldots\right)^*\right)}_{2004}=d^{2^{2004}}\quad\text{şi}\quad\underbrace{\left(\ldots\left(\left(A^*\right)^*\right)^*\ldots\right)^*}_{2004}=d^{\frac{2^{2004}-1}{3}}A.$$

Clasa a XII-a

1. Pe mulţimea $G=\{a,b,c,d,e\}$ operaţia $*$ defineşte o structură de grup. Completaţi tabla grupului G.

$*$	a	b	c	d	e
a		d			
b					
c	e				
d			b		
e					

2. Fie polinoamele $f=8X^3-6X-1$ şi $g=4X^3-3X$.

a) Să se arate că f nu are rădăcini raţionale.

b) Să se calculeze câtul şi restul împărţirii lui f la g.

c) Arătaţi că $f\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=0$.

d) Este iraţional numărul $\cos\frac{\pi}{9}$?

e) Dacă $h\in\mathbb{Q}[X]$ şi $h\left(\cos\frac{\pi}{9}\right)=0$, să se arate că $h\,\vdots\, f$.

3. *a*) Calculaţi aria subgraficului funcţiei $f:[1,e]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

b) Dacă a, b, c sunt numere reale oarecare din intervalul $[1,e]$ astfel încât $a\le b\le c$, atunci $(b-a)\ln a+(c-a)\ln b+(c-b)\ln c<2$.